

O primitivních idejích výroku a výrokové funkce

1. Úvod

V této studii budeme sledovat otázku nedefinovanosti primitivních idejí výroku (angl. *proposition*) a výrokové funkce (angl. *propositional function*) ve vybraných logických textech Bertranda Russella. Předvedeme několik podání této otázky a z tohoto pohledu uvážíme a interpretujeme dvě nabízející se cesty definování těchto idejí.

2. Výroky a výrokové funkce v Úvodu k prvnímu vydání *Principia Mathematica*

Úvod k prvnímu vydání *Principia Mathematica* (1910) má sloužit uvedení čtenáře do ducha a myšlenkové stavby knihy a nejde v něm tolik o pořádek výkladu. V první kapitole se nejprve seznámíme s ideou proměnné a jako s jejími hodnotami mimo jiné i s výroky a funkcemi:

*„V matematické logice se říká proměnná každému symbolu, jehož význam není úplně určený, a různým určením, jimž je její význam přístupný, se říká hodnoty této proměnné. Hodnotami může být jakákoli množina entit, výroků, funkcí, tříd a relací, podle okolností.“*¹

Výrok tu vystupuje mezi velmi neurčitým výrazem entita na jedné straně, podobně výchozím výrazem funkce, a následně v analýze mizejícími idejemi tříd a relací na druhé straně. Pro proměnné výroky (angl. *variable propositions*) jsou vyhrazena malá písmena p , q a r .² Co je výrok, se v první kapitole nijak výslovně nedozvíme. Naopak, při uvádění ideje funkcí výroků (angl. *functions of propositions*, tj. negace, logického součtu a součinu, implikace, ekvivalence) je už o výrocích běžně řeč:

*„Seskupení výroků branných jako celky, ne nutně jednoznačně určené, do jednoho výroku složitějšího než jeho součásti, je funkce s výroky jako argumenty.“*³

Dozvídáme se, že výroky seskupujeme do složitějších celků, a následně vidíme, jak s těmito celky budeme pracovat. Dále jsou uvedeny pravdivostní hodnoty výroků, aj.⁴ S výroky se tedy seznamujeme implicitě. Naopak výrokové funkce jsou uvedeny výslovně s odkazem na výroky:

¹ PM, s. 4. „In mathematical logic, any symbol whose meaning is not determinate is called a variable, and the various determinations of which its meaning is susceptible are called the values of the variable. The values may be any set of entities, propositions, functions, classes or relations, according to circumstances.“

² Tamtéž, s. 5.

³ Tamtéž, s. 6. „An aggregation of propositions, considered as wholes not necessarily unambiguously determined, into a single proposition more complex than its constituents, is a function with propositions as arguments.“

⁴ Tamtéž, s. 7 a dále.

„Nechť ϕx je taková výpověď obsahující proměnnou x , která se stane výrokem, když x dostane jakýkoli pevně určený význam. Pak ϕx říkáme ‚výroková funkce‘; není to výrok, neboť díky víceznačnosti x doopravdy vůbec nic netvrdí. Tak ‚ x je zraněný‘ doopravdy vůbec nic netvrdí, dokud se nedohodneme, kdo x je.“⁵

Výroková funkce je tedy výrazem obsahujícím proměnnou, který se stane výrokem po udělení hodnoty této proměnné. Následuje pak vyjasnění, kdy si proměnné zachovávají a nezachovávají identitu, a rozlišení řeči o jakékoli jednotlivé hodnotě výrokové funkce od řeči o této funkci samotné. Funkce výroků se ukáží jako zvláštní případ výrokových funkcí.⁶ Proměnné jsou tady všechny stejné (nejde o vícesortový jazyk), jen ne všechno lze vždy smysluplně udělit jako hodnotu.⁷

3. Výroky a výrokové funkce v *1 Principia Mathematica

Kapitolou *1 začíná vlastní stavba knihy a jejím smyslem je uvedení primitivních idejí a primitivních tvrzení teorie elementárních výroků a výrokových funkcí (což zhruba odpovídá tomu, co nazýváme výroková logika). Autoři nejprve vysvětlují princip primitivních idejí:

„Protože všechny definice termínů jsou provedeny pomocí jiných termínů, každý nekruhový systém definic musí začínat z jisté soustavy nedefinovaných termínů. Je do jisté míry volitelné, které ideje vezmeme v matematice jako nedefinované; motivy, které povedou naši volbu, bude (1) snížit co nejvíce počet nedefinovaných idejí a (2) ze dvou stejně velkých systémů vybrat ten, který vypadá jako jednodušší a snazší. Nevíme o žádném způsobu, jak dokázat, že takový a takový systém nedefinovaných idejí jich při takových a takových výsledcích obsahuje nejméně. Můžeme tedy jen říci, že takové a takové ideje jsou nedefinované v takovém a takovém systému, ale ne, že jsou nedefinovatelné.“⁸

Každá část tohoto prohlášení zaslouží pozornost:

- a) Některé ideje v našem systému jsou nedefinované
- b) Vybíráme si je
- c) Vybíráme si je s ohledem na jejich co nejmenší počet a na jednoduchost a snadnost systému
- d) Neumíme dokazovat, že náš výběr je v tomto ohledu nejlepší
- e) Proto mluvíme jen o nedefinovanosti v našem systému, ne o nedefinovatelnosti

⁵ Tamtéž, s. 14. „Let ϕx be a statement containing a variable x and such that it becomes a proposition when x is given any fixed determined meaning. Then ϕx is called a ‘propositional function’; it is not a proposition, since owing to the ambiguity of x it really makes no assertion at all. Thus ‘ x is hurt’ really makes no assertion at all, till we have settled who x is.”

⁶ Tamtéž, s. 15.

⁷ Více o tom viz... RHST

⁸ PM, s. 91. „Since all definitions of terms are effected by means of other terms, every system of definitions which is not circular must start from a certain apparatus of undefined terms. It is to some extent optional what ideas we take as undefined in mathematics; the motives guiding our choice will be (1) to make the number of undefined ideas as small as possible, (2) as between two systems in which the number is equal, to choose the one which seems the simpler and easier. We know no way of proving that such and such a system of undefined ideas contains as few as will give such and such results. Hence we can only say that such and such ideas are undefined in such and such a system, not that they are indefinable.“

Mezi takto vybranými primitivními idejemi jsou v této kapitole ideje elementárního výroku a elementární výrokové funkce. Idea elementárního výroku je uvedena takto:

„Elementárním výrokem míníme takový výrok, který neobsahuje žádné proměnné, nebo, jinými slovy, takový, který neobsahuje slova jako ‚každý‘, ‚nějaký‘, ‚ten určitý‘ nebo jejich ekvivalenty. Výroky jako ‚toto je červené‘, kde ‚toto‘ je něco daného v počítku, budou elementární“⁹

Výrok sám tu opět vystupuje jako už srozumitelný nebo uváděný implicitně, uvedení se tu soustředí především na elementárnost. O elementární výrokové funkci pak píšou:

„Elementární výrokovou funkcí budeme mínit takový výraz obsahující neurčitou součást, tj. proměnnou, nebo několik takových součástí, jehož výsledná hodnota, bude-li určena neurčitá součást nebo součásti, tj. bude-li udělena hodnota proměnné nebo proměnným, bude elementárním výrokem. Tak je-li p neurčitý elementární výrok, ‚non-p‘ je elementární výroková funkce.“¹⁰

To je víceméně jen zopakování formulace z úvodu, rozšiřující ideu na funkce více proměnných a naopak zužující ji na elementární výroky jako hodnoty. Když pak bude v kapitole *9 teorie rozšířena na všechny výroky a výrokové funkce a z elementárních výroků a výrokových funkcí se stanou jejich zvláštní případy (takové, které budou vždy stejného typu)¹¹, ztratí ale omezení na elementárnost význam.

Rozdíl mezi podáním ve vlastní knize a v úvodu je především v tom, že tady je výslovně řečeno, že jde o primitivní ideje, tj. o nedefinované termíny. Jejich výše citované uvádění tedy není definicí, i když bychom mohli takový dojem mít díky vazbě „elementární výrokovou funkcí budeme mínit...“ Jejich úloha jako primitivních idejí přitom nevychází z nich samých, ale z naší volby, která je vedena ohledem na jednoduchost a snadnost.

4. Výroky a výrokové funkce v *Introduction to Mathematical Philosophy*

Kniha *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919) byla napsaná několik let po *Principiích* a je viditelně zamýšlená především jako srozumitelné a učebnicově promyšlené podání jejich hlavních myšlenek. Se samostatným uvedením výroků a výrokových funkcí se proto setkáme až v jedné ze závěrečných kapitol:

⁹ Tamtéž. „By an ‘elementary’ proposition we mean one which does not involve any variables, or, in other language, one which does not involve such words as ‘all’, ‘some’, ‘the’ or equivalents for such words. A proposition such as ‘this is red,’ where ‘this’ is something given in sensation, will be elementary.”

¹⁰ Tamtéž, s. 92. „By an ‘elementary propositional function’ we shall mean an expression containing an undetermined constituent, i.e. a variable, or several such constituents, and such that, when the undetermined constituent or constituents are determined, i. e. when values are assigned to the variable or variables, the resulting value of the expression in question is an elementary proposition. Thus if p is an undetermined elementary proposition, ‘non-p’ is an elementary propositional function.”

¹¹ Viz s. 127 a dále a s. 133.

„Když jsme [...] hovořili o výrocích, nepokusili jsme se definovat slovo ‚výrok‘. Třebaže toto slovo formálně definovat nelze, je nutno říci něco o jeho významu, abychom se vyhnuli jeho velmi časté záměně s ‚výrokovými funkcemi‘...“¹²

a dále autor použije podobnou vazbu, jakou jsme už viděli výše:

„‚Výrokem‘ rozumíme v první řadě formu slov, která vyjadřuje, že je něco pravdivé nebo nepravdivé. Říkám ‚v první řadě‘, protože nechci vyloučit mimoslovní symboly či dokonce pouhé myšlenky, mají-li symbolický charakter. Myslím si však, že by slovo výrok mělo být omezeno na to, co lze v jistém smyslu nazvat ‚symboly‘, a dále na takové symboly, které vyjadřují pravdivost nebo nepravdivost.“¹³

Navzdory dojmu z vazby „‚Výrokem‘ rozumíme...“ tu nejde o definici ve smyslu pevného určení, ale o snahu předejít hrozícímu nedorozumění. Je to někdy více a někdy méně užitečné upozornění na nějaké významové rozdíly. „Říci něco o významu“ tu znamená v docela běžném smyslu pokus o vysvětlení, jak nějaké slovo chceme užívat, přičemž bereme ohled na to, jak by ho někdo mohl mít tendenci užívat trochu jinak.

Dozvídáme se, že výrok nelze formálně definovat, což ale není v rozporu s výše uvedeným podáním, v němž jsme mluvili jen o nedefinovanosti, nikoli o nedefinovatelnosti primitivních idejí. Zatímco tam šlo o všechny primitivní ideje jako o systém a opírali jsme se o to, že neumíme dokazovat, který systém je z našeho pohledu nejlepší, tady je řeč jen o jedné z nich a důvody pro její nedefinovatelnost mohou být jiné a mohou se vztahovat jen na ni. Slova „formálně definovat“ tu znamenají definice ve smyslu takového pevného slovního určení, které bude za definované kdykoli beze změny substituovatelné, tj. ve smyslu definic z *Principií*, jaké uvidíme dále.¹⁴ Omezení na symboly v širokém smyslu a spojení s pravdivostí a nepravdivostí je zopakováním klasické věty patřící k dějinám logiky, kterou různé učebnice a překlady nazývají bez bližšího výkladu definicí. Tato věta ale není formální definicí.

Rozlišení výroků od výrokových funkcí je tu provedeno na příkladu:

„Tvrzení ‚ať jsou a, b jakákoli čísla, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ je výrok; ale prostá formule ‚ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ‘ sama výrokem není, jelikož netvrdí nic určitého, pokud se nám dále neřekne nebo pokud nejsme vedeni k domněnce, že a, b mají nabýt všechny možné hodnoty nebo že mají mít takové a takové hodnoty. To první se zpravidla mlčky předpokládá při formulaci matematických formulí, které se takto stávají výroky; ale kdybychom takový předpoklad neučinili, byly by to ‚výrokové funkce‘.“¹⁵

¹² IMP, s. 155. Český překlad Karel Berka, s. 61 - 62. „When, [...] we were discussing propositions, we did not attempt to give a definition of the word ‘proposition’. But although the word cannot be formally defined, it is necessary to say something as to its meaning, in order to avoid the very common confusion with ‘propositional functions’...”

¹³ Tamtéž, český překlad s malou úpravou. „We mean by a ‘proposition’ primarily a form of words which expresses what is either true or false. I say ‘primarily,’ because I do not wish to exclude other than verbal symbols, or even mere thoughts if they have a symbolic character. But I think the word ‘proposition’ should be limited to what may, in some sense, be called ‘symbols,’ and further to such symbols as give expression to truth and falsehood.”

¹⁴ Ostatně, o jiné než formální definice výroku se i v jiných textech Russell pokoušel, viz např. ...

¹⁵ Tamtéž. „The statement: ‘Whatever numbers a and b may be, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ’ is a proposition; but the bare formula ‘ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ’ alone is not, since it asserts nothing definite unless we are further told, or led to suppose, that a and b are to have all possible values, or are to have such-and-such values. The former of

Teprve když se to jako čtenáři naučíme takto rozlišovat, setkáme se s formulací, která je v *Principiích*:

*„Výroková funkce’ je ve skutečnosti výrazem, který obsahuje jednu nebo více takových neurčitých složek, že jsou-li těmto složkám přiřazeny hodnoty, stává se tento výraz výrokem. Jinými slovy, je to funkce, jejímiž hodnotami jsou výroky...“*¹⁶

O této formulaci vzápětí autor mluví jako o definici:

*„... Ale tato definice musí být užita opatrně. Deskriptivní funkce, např. ‚nejtěžší výrok v matematické učebnici pana A’ nebude výrokovou funkcí, třebaže jejími hodnotami jsou výroky. V takovém případě jsou však výroky pouze popsány. Ve výrokové funkci musejí hodnoty opravdu artikulovat výroky.“*¹⁷

To je varování před dalším hrozícím nedorozuměním (nerozpoznáním neúplnosti symbolu, kterým deskriptivní funkce je), které je tentokrát způsobeno formulací mající za smysl předejít jinému nedorozumění. V tomto podání se tedy setkáváme s „definicemi“, které nejsou formální a jsou snahou o předcházení nedorozumění.

5. Logické výrazy v *An Inquiry into Meaning and Truth*

Kniha *An Inquiry into Meaning and Truth* (1940) byla napsaná ještě o mnoho let později a její záměr ani není primárně logický. Přesto v ní najdeme podání naší otázky, které zaslouží pozornost ze dvou důvodů: jednak ukazuje dlouhodobou a zásadní povahu Russellova postoje k této otázce a jednak je ve své stručnosti přehledné a jasné. V kapitole Logická slova (angl. *Logical words*), věnované výrazům „charakteristickým pro logiku“¹⁸, píše:

*„... Zvláště budu uvažovat o slovech ‚pravdivý’, ‚nepravdivý’, ‚ne’, ‚nebo’, ‚někteří’, ‚všichni’. Víme z logiky, že všechny tyto termíny nelze definovat, ale že do značné míry závisí na naší vůli, který budeme definovat kterým.“*¹⁹

I když tu nejsou slova „výrok“ a „výroková funkce“ výslovně zmíněna, mezi logická slova asi patří²⁰, a citovaná následující věta se na ně tedy vztahuje. Opět zaslouží pozornost každá část tohoto prohlášení:

these is tacitly assumed, as a rule, in the enunciation of mathematical formulae, which thus become propositions; but if no such assumption were made, they would be ‘propositional functions’.

¹⁶ Tamtéž, s. 155 - 156. „A ‘propositional function,’ in fact, is an expression containing one or more undetermined constituents, such that, when values are assigned to these constituents, the expression becomes a proposition. In other words, it is a function whose values are propositions...”

¹⁷ Tamtéž, s. 156. „... But this latter definition must be used with caution. A descriptive function, e.g. ‘the hardest proposition in A’s mathematical treatise,’ will not be a propositional function, although its values are propositions. But in such a case the propositions are only described: in a propositional function, the values must actually enunciate propositions.”

¹⁸ IMT, s. 95.

¹⁹ Tamtéž. Český překlad Jindřich Husák, 1975, s. 102. „... I shall especially consider ‘true’, ‘false’, ‘not’, ‘or’, ‘some’, and ‘all’. We know from logic that these terms cannot all be defined, but that it is to a large extent optional which shall be defined in terms of which.”

- a) Nelze definovat všechny logické výrazy
- b) Některé z nich lze definovat pomocí jiných
- c) To, které definujeme pomocí kterých, je do značné míry (ne tedy úplně, což je důležité) věcí našeho výběru

I kdybychom snad tedy mohli (v rozporu s tezí z *Introduction*, a navíc slova „do značné míry“ mohou znamenat kromě jiného i to, že nemůžeme) podat logiku tak, že by v ní výrazy „výrok“ a „výroková funkce“ byly definované pomocí jiných, bylo by toto podání volitelné právě tak, jako to výše předvedené, v němž to tak není. Jinými slovy: takové podání by pro logiku nebylo závazné.

6. Definice v *Principia Mathematica*

Pro srovnání se podívejme, co a jak naopak v *Principiích* definované je. Definice tu mají tu roli, kterou známe z moderní matematiky. Na jednu stranu jsou definice pouhými zkratkami, což autoři uvádějí takto:

*„Definice je vyhlášení, že jistý nově zavedený symbol má znamenat to samé, jako jistá jiná kombinace symbolů, jejichž význam už je známý.“*²¹

Jde tu o pevné určení významu nového výrazu. Přitom připouští ještě druhou podobu definice, v níž je stejným způsobem určený až význam každého smysluplného celku, který nově zavedený symbol (v tomto případě tzv. neúplný symbol) obsahuje.²² Definovanému říkají definiendum a definujícímu definiens. A aby nebyly o jejich povaze žádné pochybnosti, výslovně píší:

*„Je třeba si všimnout, že definice, přísně vzato, není součástí pojednání, v němž se vyskytuje. Definice se totiž zabývá jenom symboly, ne tím, co symbolizují. Navíc není ani pravdivá, ani nepravdivá, neboť je výrazem volby, ne výrokem. [...] definice nejsou žádnou součástí našeho pojednání, ale, přísně vzato, jsou pouhým typografickým usnadněním.“*²³

V tomto smyslu bychom se mohli úplně obejít bez nich, pokud by pro nás nebyla snadnost a přehlednost výkladu důležitá; všechny výrazy, které je obsahují, lze beze změny významu přeložit do výrazů bez nich, a proto dokonce ani samotná idea definice nepatří k primitivním ideám předváděné přístupu.²⁴

Na druhou stranu, v jiném smyslu jsou tím, co je v pojednání nejzajímavější:

²⁰ Splňují totiž podmínku, jíž jsou v této knize logická slova vymezena. Jde o to, aby nepatřila ke slovům „objektového jazyka“, tj. abychom se jejich význam neučili získáním takové přímé asociace mezi slovem a věcí, která nepředpokládá porozumění řeči. Viz tamtéž, s. 80 a 85, český překlad s. 90 a 94.

²¹ PM, s. 11. „A definition is a declaration that a certain newly-introduced symbol or combination of symbols of which the meaning is already known.“

²² Tamtéž. Více o neúplných symbolech je ve třetí kapitole Úvodu, s. 68 a dále.

²³ Tamtéž, s. 11. „It is to be observed that a definition is, strictly speaking, no part of the subject in which it occurs. For a definition is concerned wholly with the symbols, not with what they symbolize. Moreover it is not true or false, being the expression of a volition, not of a proposition. [...] the definitions are no part of our subject, but are, strictly speaking, mere typographical conveniences.“

²⁴ Tamtéž.

„... je nicméně pravda, že často přinášejí důležitější informaci, než jaká je obsažena ve výrocih, v nichž jsou užity. To má dvě příčiny. Zaprvé, definice obvykle naznačuje, že definiens si zaslouží pozorné uvážení. Tudiž soubor definic ztělesňuje náš výběr předmětů pojednání a naše posouzení toho, co je nejdůležitější. Zadruhé, když je to definované (což se často stává) něčím už známým, [...] obsahuje definice analýzu běžné ideje, a může být tedy výrazem významného pokroku. [...] V takových případech je definice ‚určováním‘: dává určitost ideji, která byla předtím více nebo méně vágní.“²⁵

I když je tedy definiendum v pojednání nově zavedené, v běžném užití už mohlo být známé. Jinými slovy: právě z definic je vidět postup analytického pojednání.

Definované jsou například tři obvyklé funkce výroků, tj. implikace, konjunkce a ekvivalence, a to následovně:

$$p \rightarrow q =_{df} \sim p \vee q$$

$$p \wedge q =_{df} \sim (\sim p \vee \sim q)$$

$$p \leftrightarrow q =_{df} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Jsou to složeniny z funkcí výroků negace a disjunkce, které jsou branné jako primitivní ideje.²⁶

Výrokové funkce složené z nově zavedených výrazů pak můžeme nahrazovat výrokovými funkcemi složenými z výrazů původních, a naopak. A to jak v případě nahrazení všech zkratek vyskytujících se ve výrokové funkci, tak i v případě nahrazování jen některých z nich. Například výrokové funkce

$$(p \vee p) \rightarrow p$$

$$\sim ((p \vee q) \rightarrow r)$$

$$(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$$

můžeme popořadě nahradit výrokovými funkcemi

$$\sim (p \vee p) \vee p$$

$$\sim (\sim (p \vee q) \vee r)$$

$$\sim \sim (\sim p \vee \sim q) \vee \sim (\sim q \vee \sim p)$$

$$\sim (\sim (\sim (\sim (\sim p \vee \sim q) \vee \sim (\sim q \vee \sim p))) \vee \sim (\sim \sim (\sim q \vee \sim p) \vee \sim (\sim p \vee \sim q)))$$

přičemž poslední výrokovou funkci z prvního výčtu můžeme nahradit také výrokovými funkcemi

$$((p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)) \wedge ((q \wedge p) \rightarrow (p \wedge q))$$

$$(\sim (p \wedge q) \vee (q \wedge p)) \wedge (\sim (q \wedge p) \vee (p \wedge q))$$

$$\sim (\sim (\sim (p \wedge q) \vee (q \wedge p)) \vee \sim (\sim (q \wedge p) \vee (p \wedge q)))$$

²⁵ Tamtéž, s. 11 a 12. „... it is nevertheless true that they often convey more important information than is contained in the proposition in which they are used. This arises from two causes. First, a definition usually implies that the definiens is worthy of careful consideration. Hence the collection of definitions embodies our choice of subjects and our judgment as to what is most important. Secondly, when what is defined is (as often occurs) something already familiar, [...] the definition contains an analysis of a common idea, and may therefore express a notable advance. [...] In such cases, a definition is a making definite: it gives definiteness to an idea which had previously been more or less vague.“

²⁶ Jde o definice *1.01, *3.01 a *4.01. Viz tamtéž, s. 94, 111 a 117. Užívám tu symboly „~“, „∨“, „→“, „∧“, „↔“ pro (popořadě) negaci, disjunkci, implikaci, konjunkci a ekvivalenci; závorky píšu dnes obvyklým způsobem, nikoli tečkovou notací.

a naopak.²⁷ Definice ale nemusejí být jen symbolické, tj. nemusejí zkracovat jen výrazy zcela zapsané symbolicky. Například induktivní definice toho, co to znamená „být stejného typu“, taková není:

Říkáme, že dva výrazy „jsou stejného typu“, když

1. Oba jsou individua
2. Oba jsou elementární výrokové funkce s proměnnými stejného typu
3. Jeden je výroková funkce a druhý je její negace
4. Jeden je elementární výroková funkce a druhý je její disjunkce s jinou elementární výrokovou funkcí
5. Jsou obecnými kvantifikátory výrokových funkcí stejného typu (v nichž po kvantifikaci zůstane volná proměnná)
6. Oba jsou elementární výroky
7. Jeden je výrok a druhý jeho negace
8. Jsou obecnými kvantifikátory výrokových funkcí stejného typu²⁸

Tato definice zavádí výraz „být stejného typu“, který je pak užíván v různých formulacích jako „... jestliže jsou stejného typu“ nebo „... potom jsou stejného typu“ apod. Tyto formulace jsou vždy nahraditelné dlouhým (často ovšem s neznámou délkou) pojednáním o tom, jaké příslušné výrazy mají být nebo jsou, v nichž se slova „být stejného typu“ nevyskytují.

7. První nabízející se definice: z idejí pevného významu, hodnoty, pravdy, a nepravdy

Z výše předvedených způsobů uvedení idejí výroku a výrokové funkce snadno získáme dojem, že bychom je mohli definovat takto:

1. Symbol je výraz s významem natolik pevným a natolik v našich rukou, nakolik potřebujeme
2. Proměnná je symbol, který může mít různé hodnoty
3. Výrok je symbol, který je pravdivý nebo nepravdivý
4. Výroková funkce je symbol, který obsahuje nějaké proměnné a který by se stal výrokem (tj. hodnotou této funkce) po udělení nějakých hodnot těmto proměnným²⁹

Výrok a výroková funkce by pak už nebyly primitivními idejemi, těmi by byly: pevný význam, hodnota, pravda a nepravda.³⁰ Mohli bychom si navíc myslet, že tato definiens významově předcházejí

²⁷ Přitom ale například funkci $\sim(p \vee p) \rightarrow p$ nemůžeme podle definice implikace nahradit funkcí $(p \vee p) \vee p$ nebo naopak; takové nahrazení je složitějším postupem zahrnujícím užití principu dvojité negace.

²⁸ Jde o definici *9.131, klíčovou pro teorii typů. Viz tamtéž, s. 133. Tato definice bývá v literatuře předmětem kritiky kromě jiného proto, že oproti očekávání nezahrnuje krok jako „Jeden je výroková funkce a druhý je její disjunkce s jinou výrokovou funkcí stejného typu“, viz např. dále citovaný text...

²⁹ Udělení hodnot proměnným tu ale neznamená dosažení jiných výrazů.

³⁰ Všechny další primitivní ideje *Principií* bychom pak „definovali“ takto: Tvrzení výroku je kladení výroku jako pravdivého; tvrzení výrokové funkce je tvrzení její libovolné hodnoty; disjunkce je taková výroková funkce obsahující dvě proměnné, jejíž hodnota je pravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty výroky, z nichž je aspoň jeden pravdivý, a jejíž hodnota je nepravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty nepravdivé výroky; negace je taková výroková funkce obsahující jednu proměnnou, jejíž hodnota je pravdivá,

definienda v tom smyslu, že je potřeba dříve rozumět tomu, co o definovaném říkáme, než jej budeme užívat.

8. Druhá nabízející se definice: induktivní definice podle složení

Ze zvyku osvojeného ve škole dále snadno získáme dojem, že bychom mohli výrok a výrokovou funkci definovat induktivně podle složení. Než bychom zbytečně vymýšleli vlastní, ukážeme jednu takovou formalizaci, pocházející ze současné rekonstrukce původní teorie typů, jak ji vypracovali Firouz Kamareddine, Twan Laan a Rob Nederpelt³¹:

1. Mějme množinu A tvořenou individui, množinu V tvořenou proměnnými a množinu R tvořenou relačními symboly spolu s funkcí z R do kladných přirozených čísel, která každé relaci přiřadí její aritu. Předpokládejme, že množiny A , V , a všechny podmnožiny R pro každou aritu jsou spočetně nekonečné.
2. Elementární výroky jsou všechny výrazy tvaru $r(a_1, a_2, \dots, a_n)$, kde r je prvkem R , n je aritou r , a a_1, a_2, \dots, a_n jsou prvky A .
3. Postupně definujeme množinu P tvořenou výrokovými funkcemi. Je-li r je prvkem R , n je aritou r a t_1, t_2, \dots, t_n jsou prvky sjednocení A a V , pak $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je prvkem P .
4. Jsou-li f a g prvky P , pak $f \vee g$ a $\sim f$ jsou také prvky P .
5. Je-li f prvkem P a x je proměnná volná ve f , pak $\forall x f$ je také prvkem P .
6. Je-li n přirozené číslo, z prvek V a k_1, k_2, \dots, k_n jsou prvky sjednocení A , V a P , pak $z(k_1, k_2, \dots, k_n)$ je také prvkem P .
7. Všechny výrokové funkce tvořící P mohou být konstruovány pomocí pravidel 3, 4, 5 a 6.
8. Výroky jsou výrokové funkce bez volných proměnných.

Samozřejmě užívání přirozených čísel a výrazů z teorie množin, a tedy idejí, které jsou v *Principiích* naopak analyzovány později (resp. jako pro neúplné symboly jsou definovány významy celků, které je obsahují) nás nemusí mást. Snadno tuto formalizaci proměníme do podoby, která bude bez nich:

1. Mějme individua, proměnné a relační symboly, na nichž je poznat jejich arita. Předpokládejme, že jich všech máme tolik, kolik budeme potřebovat.
2. Elementární výroky jsou všechny výrazy tvaru $r_1(a_1), r_2(a_1, a_2), \dots$ atd., kde r_1, r_2, \dots atd. jsou relační symboly s vhodnou aritou a a_1, a_2, \dots atd. jsou individua.
3. Postupně definujeme výrokové funkce. Jsou-li r_1, r_2, \dots atd. relační symboly s vhodnou aritou a t_1, t_2, \dots atd. jsou individua nebo proměnné, pak $r_1(t_1), r_2(t_1, t_2), \dots$ atd. jsou výrokové funkce.³²

když její proměnné udělíme jako hodnotu nepravdivý výrok, a jejíž hodnota je nepravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu pravdivý výrok; obecný kvantifikátor je taková výroková funkce obsahující jednu proměnnou, (1) jejíž hodnota je pravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu takovou výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, jejíž všechny hodnoty jsou pravdivé, a (2) jejíž hodnota je nepravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu takovou výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, která má nějakou nepravdivou hodnotu; individuum je symbol, který není ani výrok, ani výroková funkce. Stačí tedy přibrat ještě ideu kladení.

³¹ Viz. ... Jejich zájem ovšem jiný, než jaký sledujeme v této studii, a proto nelze jednoduše říci, že by šlo o pokus porozumět otázce definovanosti nebo nedefinovanosti příslušných primitivních idejí.

³² Toto se může částečně opírat i o úvod k druhému vydání *Principií*, s. xv a xix.

4. Jsou-li f a g výrokové funkce, pak $f \vee g$ a $\sim f$ jsou také výrokové funkce.
5. Je-li f výroková funkce a x je proměnná volná ve f , pak $\forall x f$ je také výroková funkce.
6. Je-li z proměnná a k_1, k_2, \dots atd. jsou individua, proměnné nebo výrokové funkce, pak $z(k_1), z(k_1, k_2), \dots$ atd. jsou také výrokové funkce.
7. Všechny výrokové funkce mohou být konstruovány pomocí pravidel 3, 4, 5 a 6.
8. Výroky jsou výrokové funkce bez volných proměnných.

Primitivními idejemi by pak byly: individua, proměnné, relační symboly, disjunkce, negace a obecný kvantifikátor. Užití číselných indexů tu nehraje žádnou roli, mohli bychom užívat prostě různé znaky nebo čárky apod.

9. Uvážení nabízejících se definic

Vydeme-li z toho, co jsme výše ukázali, tj. že v předvedených podáních výroky a výrokové funkce formálně nedefinujeme a ani je nepovažujeme za formálně definovatelné nebo jejich případné definice aspoň nepovažujeme za závazné, je třeba uvážit smysl nabízejících se definic. Důsledky jsou tyto:

- a) Definující v nich významově nepředchází definované
- b) V nich definované není beze změny významu vždy nahraditelné definujícími

To v případě první nabízející se „definice“ znamená, že i když jsou její věty při uvádění primitivních idejí užitečné pro předcházení nedorozumění, neurčují pevně jejich význam, jakoby do té doby samy žádný neměly. Uvádění je zkrátka něco jiného než analýza. Navíc se někdy stane, že formulace jindy předcházející nedorozumění naopak významový zmatek vyvolají.

V případě druhé nabízející se „definice“ to znamená, že nemáme důvod se domnívat, že idea relačního symbolu významově předchází ideje výroku a výrokové funkce. Mohli bychom naopak říci, že relační symbol je způsob složení individuí do výroku nebo do výrokové funkce. To, že výrokové funkce jsou konstruovatelné abstrakcí z výroků, což je myšlenka stojící za uvedenou „definicí“, neukazuje jejich významový původ, i když je to pravda. Kromě toho je ale ukvapený dojem vyjádřený pravidlem 7, že takto dojdeme ke všem výrokovým funkcím. Uvedená induktivní definice spíše pevně určuje pouhý fragment řeči, který lze následně promýšlet (a pak ani nevadí a naopak je ku prospěchu věci užívání výrazů teorie množin, protože studium tohoto fragmentu může být rozvíjeno jako součást pozdějšího postupu).

10. Závěr

Viděli jsme tedy několik podání otázky nedefinovanosti primitivních idejí výroku a výrokové funkce a uvážili dvě nabízející se cesty jejich definování. I když je potřeba primitivní ideje uvádět, a v tomto smyslu o nich „něco říci“, nejde ještě o takové definice, s nimiž bychom museli spojovat svou

představu o významovém předcházení. Myšlenky, z nichž nabízející se cesty vycházejí, přitom mají dobrý smysl i bez toho.

Seznam literatury

Kamareddine, F. – Laan, T. – Nederpelt, R. 2002. Types in Logic and Mathematics before 1940. *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 8/2, 185-245.

Landini, G. 1998. *Russell's Hidden Substitutional Theory*. Oxford: Oxford University Press.

Russell, B. 1919. *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Routledge.

Russell, B. 1919. On Propositions: what they are and how they mean. In: Russell, B. 1956: *Logic and Knowledge*. London: Routledge, 285 – 320.

Russell, B. 2007 (orig. 1940). *An Inquiry into Meaning and Truth*. Nottingham: Spokesman.

Russell, B. - Whitehead, A. N. 1927 (první vydání 1910). *Principia Mathematica vol. I.*, 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press.