

Co je logika?

Togga

Co je logika?

Studie k chápání logiky
v *Principia Mathematica* Bertranda Russella
a Alfreda N. Whiteheada

Tomáš Holeček

Suplementum III
Ročenky pro filosofii a fenomenologický výzkum

Togga

*Publikace je výsledkem činnosti univerzitního centra excelence
„Centrum fenomenologického výzkumu“ při Fakultě humanitních studií
Univerzity Karlovy v Praze (2012–2016).*

Recenzovali:
Vojtěch Kolman
Michal Zadražil

© Tomáš Holecček, 2014
© Togga, 2014

ISBN 978-80-7476-058-7

Obsah

Úvod

7

1. kapitola

9

2. kapitola

19

3. kapitola

83

Závěr

135

Summary

137

Příloha 1

Rejstřík a glosář

139

Příloha 2

Seznam výchozích myšlenek, definic
a výchozích a dalších předvedených tvrzení
Na třetí straně obálky a na zadní záložce

Úvod

Kdo se seznamuje s logikou, mívá přehnaná očekávání, která ho vedou k omylům, a pak případně k tomu, že se bude raději zabývat něčím jiným. Mívá totiž dojem, že jeho myšlenky by měly nějak předcházet všem myšlenkám a že jeho řeč by měla nějak zvládnout všechnu řeč. Postupuje tu po cestě, kterou popsal Ladislav Klíma:

*Myšlenky – příšery – příšery – nic.*¹

Protože se hledáním něčeho, co předchází myšlenkám, a něčeho, co zvládá řeč, dostane od myšlenek a řeči k příšerám, bude zklamaný. Cílem této studie je ukázat, že logika se bez toho obejde.

Předvádím tu pojetí logiky v *Principia Mathematica* Bertranda Russella a Alfreda N. Whiteheada.² Každé předvedení je ale úpravou. Dnešní logika je výsledkem řady takovýchto úprav, začínající např. díly Franka Ramseye, Alfreda Tarskiho, Kurta Gödela, Willarda V. Quinea a pokračující do dneška. Když se někdo k původnímu pojetí vrací, chce z dnešního pohledu a podle dnešních měřítek posoudit, co z toho spisu stále ještě zaslouží pozornost. Jeho pohled bývá vedený především samozřejmým rozlišením „metajazyka“ od „objektového jazyka“ a „syntaxe“ od „sémantiky“. Abych sledoval svůj cíl, využívám původní pojetí k něčemu jinému: k tomu, abych se z dnešního pohledu a z dnešních měřítek aspoň trochu vyvázal.

Postupuji takto: V první kapitole předvádím rozhodnutí o tom, co je logika. Je to stručná kapitola a bez použití umělých výrazů (jinak řečeno „symbolismu“). V druhé kapitole, zamýšlené jako cvičení v logice, ukazuji

1 V rukopisu traktátu *Metalogismus* z 1. 12. 1919, in: Klíma, L., *Sebrané spisy I., Mea*, Praha, Torst 2005, s. 143.

2 Russell, B., Whitehead, A. N., *Principia Mathematica* (PM), vol. I., Cambridge, CUP 1910, 1927.

naplnění tohoto rozhodnutí včetně příkladů a důkazů. Pro toho, kdo už v dokazování vycvičený je, bude snadná, pro ostatní by to měl být podrobný výklad. Ve třetí kapitole potom uvádím otázky, které to vyvolává.

1. kapitola

§1

Nejprve se rozhodneme, co budeme dělat. K tomuto rozhodnutí patří důvěra v to, že to dělat dovedeme:

- a) budeme analyzovat, tj. rozmotávat, myšlenky a postupy důkazů. Rozmotáváním tu rozumíme nacházení nebo vytváření co nejjednodušších myšlenek, jejichž myšlením a postupováním podle nichž umíme rozmotávané předvést. Chceme, aby takových co nejjednodušších myšlenek (budeme jim říkat „výchozí“ myšlenky) bylo co nejméně
- b) mnohé z nich budeme zapisovat umělými výrazy. Těmi tu rozumíme takové výrazy, jejichž smysl je natolik pevný a natolik v našich rukou, na kolik budeme potřebovat. Chceme, aby jejich užívání bylo co nejsnazší
- c) budeme přitom v myšlenkách a postupech důkazů předcházet paradoxům. Paradoxem tu rozumíme něco nežádoucího, k čemu by nás naše myšlenky a postupy sváděly, a předcházením paradoxu tu rozumíme takové myšlení a postupování, v němž nás k tomu svádět nebudou

§2

Uvedená tři rozhodnutí jsou samostatná, mohou být jedno bez druhého. Sama o sobě, po jednom nebo po dvou, by vedla k něčemu jinému.

§3

Naše rozmotání bude dvoustupňové. V prvním stupni si dáme pozor na to, abychom neudělali ani nevynechali nic, co by nám později překáželo nebo chybělo.

§4

Budeme užívat umělé výrazy, které v běžné řeči nemáme. Jde nám totiž o jiné a jednodušší myšlenky, než pro jaké je běžná řeč vhodná.

§5

Skládání umělých výrazů bude spojené s jejich podobou.

§6

Opakovaným skládáním umělých výrazů se chceme dostat k novým myšlenkám a postupům, k nimž bychom se v běžné řeči nedostali; ta není pro opakované skládání vhodná. Opakované skládání nám poslouží jako opora myšlení.

§7

Umělé výrazy budou stručné a přehledné, a to případně i díky zavádění zkratk.

§8

Umělé výrazy chceme užívat k výčtům myšlenek a postupů.

§9

Uděláme to takto:

- a) uvedeme několik málo výchozích myšlenek
- b) jejich myšlením a postupováním podle nich budeme předvádět všechny myšlenky a postupy důkazů, které budeme chtít rozmotat. Nejprve jich

předvedeme několik málo (těm budeme opět říkat „výchozí“, tentokrát jde ale o kroky v analýze), a k ostatním dojdeme z nich

§ 10

Všechny naše výchozí myšlenky se týkají výrazů, protože z výrazů se sestávají důkazy.

§ 11

Budeme rozlišovat mezi proměnnými a konstantními výrazy. Proměnnými tu rozumíme takové výrazy (budeme jim říkat krátce „proměnné“), které mohou mít různé hodnoty, a konstantními (těm budeme říkat krátce „konstanty“) ty, které takové nejsou.

§ 12

Důležitými výrazy pro nás budou výroky. Výroky tu rozumíme takové výrazy, které mohou být pravdivé nebo nepravdivé.

§ 13

Od výroků odlišíme výrokové funkce. Výrokovými funkcemi rozumíme takové výrazy, které obsahují nějaké proměnné a z nichž by se po udělení nějakých hodnot těmto proměnným staly výroky (těm budeme říkat „hodnoty výrokové funkce“). Podle toho, po udělení jakých hodnot proměnným by se z nich staly výroky, budeme mluvit např. o „výrokových funkcích výroků“ nebo „výrokových funkcích výrokových funkcí“.

§ 14

Výroky i výrokové funkce budou někdy konstantní a někdy proměnné.

§ 15

Mnohé výroky i výrokové funkce budeme zčásti nebo zcela zapisovat umělými výrazy, ale ne všechny.

§ 16

Nejprve předvedeme rozmotávání myšlenek a postupů důkazů, v němž nehrají roli žádné výrokové funkce výrokových funkcí, ale pouze některé výrokové funkce některých výroků (zhruba odpovídající tomu, čemu dnes říkáme „výroková logika“).

§ 17

Uvedeme tyto výchozí myšlenky:

- a) myšlenku elementárního výroku. Elementárním výrokiem rozumíme takový výrok, který neobsahuje žádné vázané proměnné
- b) myšlenku elementární výrokové funkce. Elementární výrokovou funkcí rozumíme takovou výrokovou funkci, která by se po udělení nějakých hodnot svým proměnným stala elementárním výrokiem
- c) myšlenku tvrzení elementárního výroku. Tvrzením elementárního výroku rozumíme jeho kladení, na rozdíl od přemýšlení o něm
- d) myšlenku tvrzení elementární výrokové funkce. Tvrzením elementární výrokové funkce rozumíme tvrzení jakékoli její hodnoty
- e) myšlenku disjunkce. Disjunkcí rozumíme takovou elementární výrokovou funkci obsahující dvě proměnné, jejíž hodnota (tj. výrok, jímž se stane) je pravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty elementární výroky, z nichž je aspoň jeden pravdivý, a jejíž hodnota je nepravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty nepravdivé elementární výroky. Disjunkci budeme zapisovat umělým výrazem
- f) myšlenku negace. Negací rozumíme takovou elementární výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, jejíž hodnota je pravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu nepravdivý elementární výrok, a jejíž hodnota je nepravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu pravdivý elementární výrok. I negaci budeme zapisovat umělým výrazem

§ 18

Přestože máme myšlenky elementárního výroku a jeho tvrzení, v analýze uplatníme spíše myšlenky elementární výrokové funkce a jejího tvrzení. Předváděné myšlenky budou jakoby vzorem myšlenek a postupů důkazů s elementárními výroky.

§ 19

Výrokové funkce negace a disjunkce budeme skládat.

§ 20

Tvrzením elementární výrokové funkce rozumíme i tvrzení jakékoli její instance, tj. elementární výrokové funkce, jejíž všechny hodnoty jsou i hodnotami původní funkce. K instancím přecházíme z tvrzené elementární výrokové funkce dosazováním elementárních výrokových funkcí nebo elementárních výroků za proměnné.

§ 21

Jako výchozí kroky v analýze předvedeme:

- a) definice několika výrokových funkcí složených z negace a disjunkce (bude to implikace, konjunkce a ekvivalence); i je budeme zapisovat umělými výrazy. Definici tu rozumíme výrazovou zkratku, a všechny výrazy zapsané pomocí definovaných výrokových funkcí proto můžeme zpátky rozepsat jako výrazy se stejným smyslem, které je neobsahují
- b) tvrzení několika výrokových funkcí složených z negace a disjunkce (resp. z nich a z jedné výrazové zkratky). Tato tvrzení budou zapsaná umělými výrazy a později budou sloužit někdy jako pravidla a někdy jako předpoklady. Vybereme je podle toho, abychom z nich došli ke všem dalším tvrzením výrokových funkcí elementárních výroků, k nimž dojít chceme. Jejich volba nebude vycházet z jejich samozřejmosti

- c) pravidlo inference. Pravidlem inference tu rozumíme tvrzení o pravdivosti čehokoli, na co se podle nějakého předpokladu přenáší pravdivost jiného předpokladu. Předpokladem tu rozumíme cokoli, co už v nějakém kroku analýzy tvrdíme, nebo k čemu právě inferencí z nějakých dalších předpokladů dojdeme
- d) pravidlo zachování elementárnosti výroků. Tímto pravidlem rozumíme tvrzení toho, že negace elementárního výroku i disjunkce elementárních výroků je stále elementárním výrokem
- e) pravidlo identifikace proměnné. Tímto pravidlem rozumíme tvrzení toho, že složíme-li disjunkcí dvě elementární výrokové funkce obsahující tutéž proměnnou, bude jejich složení opět elementární výrokovou funkcí obsahující tuto proměnnou na původních místech v obou skládaných členech

§ 22

Výroky a výrokové funkce tvrdíme jako výchozí kroky analýzy, jsou-li ony nebo jakékoli jejich hodnoty pravdivé a budou-li vhodné k dalšímu, pokud možno stručnému a přehlednému, postupu.

§ 23

K dalším tvrzením, ať už zapsaným umělými výrazy nebo ne, budeme přecházet rozpoznáním, že jimi budeme tvrdit něco, co už tvrdíme, nebo inferencí z něčeho, co už tvrdíme.

§ 24

Dále předvedeme rozmotání myšlenek a postupů důkazů, v němž hrají roli i některé výroky a výrokové funkce, které nejsou elementární, a některé výrokové funkce některých výrokových funkcí (zhruba odpovídající tomu, čemu dnes říkáme „predikátová logika s teorií typů“).

§ 25

Uvedeme tyto výchozí myšlenky:

- a) rozšíření všech dosavadních výchozích myšlenek i na neelementární výroky a výrokové funkce
- b) myšlenku obecného kvantifikátoru. Obecným kvantifikátorem rozumíme takovou výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, (1) jejíž hodnota je pravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu takovou výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou (té říkáme „vázaná“ proměnná, na rozdíl od „volné“), jejíž všechny hodnoty jsou pravdivé, a (2) jejíž hodnota je nepravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu takovou výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, která má nějakou nepravdivou hodnotu. Obecný kvantifikátor budeme zapisovat umělým výrazem
- c) myšlenku individua. Individuem rozumíme takový výraz obsažený ve výroku nebo ve výrokové funkci, který sám není ani výrokem, ani výrokovou funkcí. (Individua jsou dalšími důležitými výrazy vedle výroků a výrokových funkcí; stejně jako výroky a výrokové funkce mohou být proměnné nebo konstantní)

§ 26

Přestože máme myšlenku individua, v analýze konstantní individua spíše neuplatníme.

§ 27

Udělíme-li proměnné v obecném kvantifikátoru jako hodnotu výrokovou funkci obsahující více proměnných, bude se obecný kvantifikátor vázat nejvýše k jedné z nich a stane se výrokovou funkcí obsahující ty zbývající proměnné.

§ 28

Výrokové funkce obecného kvantifikátoru, negace a disjunkce budeme skládat; a budeme je skládat i s dalšími výrokovými funkcemi.

§ 29

Tvrzením výrokové funkce opět rozumíme i tvrzení jakékoliv její instance. K instancím přecházíme přípustným dosazováním nějakých výrokových funkcí, výroků nebo individuí za nějaké proměnné.

§ 30

Jako výchozí kroky v další analýze předvedeme:

- a) definici další výrokové funkce složené z negace a obecného kvantifikátoru (bude to existenční kvantifikátor), tuto funkci budeme také zapisovat umělým výrazem. Předchozí definice rozšíříme i na neelementární výroky
- b) definici stejnosti typu dvou výrazů. Definici tu opět rozumíme výrazovou zkratku, kterou bychom v jednotlivých případech mohli zpátky rozepsat: tentokrát jde ale o zkrácený výraz o smyslu dvou výrazů
- c) tvrzení výrokových funkcí složených z negace a disjunkce, která byla výchozími kroky už v předchozím stupni analýzy; teď budou jen rozšířena i na neelementární výroky
- d) tvrzení několika nových výrokových funkcí složených z negace, disjunkce a obecného kvantifikátoru (resp. z disjunkce, obecného kvantifikátoru a implikace jako už zavedené výrazové zkratky). Tato tvrzení budou zapsaná umělými výrazy a budou, stejně jako v analýze elementárních výroků a elementárních výrokových funkcí, sloužit někdy jako pravidla a někdy jako předpoklady
- e) pravidlo inference rozšířené i na neelementární výroky a výrokové funkce
- f) pravidlo generalizace. Pravidlem generalizace tu rozumíme tvrzení pravdivosti hodnoty obecného kvantifikátoru, jehož proměnné udělíme jako hodnotu nějaký předpoklad

- g) pravidlo stejnosti typu. Tímto pravidlem rozumíme tvrzení toho, že je-li výraz obsahující proměnnou smysluplný, je smysluplný s konstantou na jejím místě právě tehdy, je-li tato konstanta stejného typu jako tato proměnná
- h) pravidlo nahrazování konstant a proměnných. Tímto pravidlem rozumíme tvrzení toho, že výraz obsahující nějakou konstantu je výrok právě tehdy, když je to s proměnnou na jejím místě výroková funkce

§ 31

Volba výchozích kroků je opět vedená pravdivostí tvrzených výroků nebo hodnot tvrzených výrokových funkcí a jejich vhodností k dalšímu postupu.

§ 32

K dalším tvrzením budeme opět přecházet rozpoznáním, že jimi budeme tvrdit instance něčeho, co už tvrdíme, a inferencí nebo generalizací z předpokladů, které už tvrdíme. Přechody k dalším tvrzením, které jsme udělali už v předchozím stupni analýzy, přebíráme.

§ 33

Jak výchozí myšlenky, tak i výchozí kroky této další analýzy, které se týkají výroků a výrokových funkcí, jsou typově víceznačné.

§ 34

Kdybychom chtěli přidávat další výchozí myšlenky nebo výchozí kroky, nic nám v tom nebrání.

2. kapitola

§ 35

Abychom se seznámili s tím, co děláme, je třeba se v tom vycvičit. Podrobně teď předvedeme myšlenky z první kapitoly a postup podle nich. Přitom budeme sledovat různé podoby kroků postupu. Tam, kde to bude na místě, budeme užívat umělé výrazy.³

§ 36

Začneme opět analýzou, v níž nehrají roli žádné výrokové funkce výrokových funkcí, ale pouze některé výrokové funkce některých (teď už víme, že elementárních) výroků.

Zopakujme výchozí myšlenky, jak byly uvedeny v § 17:

- a) myšlenka elementárního výroku: elementárním výrokiem rozumíme takový výrok, který neobsahuje žádné vázané proměnné. Proměnné elementární výroky (dnes jsme zvyklí jim říkat spíše „proměnné pro elementární výroky“ nebo „elementárně-výrokové proměnné“ podobně jako „proměnné pro čísla“ nebo „číselné proměnné“) budeme zapisovat písmeny p, q, r, s
- b) myšlenka elementární výrokové funkce: elementární výrokovou funkcí rozumíme takovou výrokovou funkci, která by se po udělení nějakých hodnot svým proměnným stala elementárním výrokiem
- c) myšlenka tvrzení elementárního výroku: tvrzením elementárního výroku rozumíme jeho kladení, na rozdíl od přemýšlení o něm

³ Pro snadnější čtení budeme používat dnešní způsob značení, a nikoliv původní. V zápisích tvrzení nezapsaných pouze pomocí umělých výrazů se umělým výrazům vyhneme.

- d) myšlenka tvrzení elementární výrokové funkce: tvrzením elementární výrokové funkce rozumíme tvrzení jakékoli její hodnoty. Tvrzení výroků nebo výrokových funkcí, které by byly zapsané umělými výrazy, budeme zapisovat tak, že před ně napíšeme znak $\vdash$
- e) myšlenka disjunkce: disjunkcí rozumíme takovou elementární výrokovou funkci obsahující dvě proměnné, jejíž hodnota (tj. výrok, jímž se stane) je pravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty elementární výroky, z nichž je aspoň jeden pravdivý, a jejíž hodnota je nepravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty nepravdivé elementární výroky. Disjunkci dvou elementárních výroků p a q budeme zapisovat $p \vee q$
- f) myšlenka negace: negací rozumíme takovou elementární výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, jejíž hodnota je pravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu nepravdivý elementární výrok, a jejíž hodnota je nepravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu pravdivý elementární výrok. Negaci elementárního výroku p budeme zapisovat $\sim p$

§ 37

Příklady elementárních výroků jsou výrazy

Petr jde do školy
Petr nese knihu Michalovi

rozumíme-li jim tak, že neobsahují žádné proměnné. Jejich disjunkcí potom je

Petr jde do školy $\vee$ Petr nese knihu Michalovi

a negací prvního z nich

$\sim$ Petr jde do školy

Věty běžné řeči „Petr jde do školy nebo nese knihu Michalovi“ a „Petr nejde do školy“ se od nich liší tím, že jejich smysl není tak jednoduchý: První z umělých výrazů je prostě hodnotou disjunkce, v níž první proměnné

udělíme jako hodnotu elementární výrok „Petr jde do školy“ a druhé proměnné elementární výrok „Petr nese knihu Michalovi“; je to výrok, který je pravdivý, jsou-li obě udělené hodnoty pravdivé, a nepravdivý, je-li nepravdivá aspoň jedna z nich. Druhý z těchto výrazů je hodnotou negace, v níž proměnné udělíme jako hodnotu elementární výrok „Petr jde do školy“; je to výrok, který je pravdivý, když je udělená hodnota nepravdivá, a nepravdivý, je-li pravdivá.

§ 38

Příklady elementárních výrokových funkcí jsou

$$\begin{array}{c} p \\ \text{Petr jde do školy} \vee p \\ p \vee \text{Petr nese knihu Michalovi} \\ p \vee q \\ \sim p \end{array}$$

První z nich je elementární výroková funkce, jejíž hodnotou je jakýkoli elementární výrok; druhá je elementární výroková funkce, jejíž hodnotou je disjunkce výroku „Petr jde do školy“ s jakýmkoli elementárním výrokem; třetí je elementární výroková funkce, jejíž hodnotou je disjunkce jakéhokoli elementárního výroku s výrokem „Petr nese knihu Michalovi“; čtvrtá je elementární výroková funkce, jejíž hodnotou je disjunkce jakýchkoli dvou elementárních výroků, tj. je to disjunkce; pátá je elementární výroková funkce, jejíž hodnotou je negace jakéhokoli elementárního výroku, tj. je to negace.

Tyto výrazy budeme brát někdy jako výrokové funkce a někdy jako jejich proměnné hodnoty, tj. jako výroky, jimiž by se staly po udělení hodnot proměnným, které obsahují. Tento rozdíl zdůrazníme tím, jak o výrazech budeme mluvit, např. někdy budeme mluvit o „výrokové funkci $p \vee q$ “ a jindy o „výroku $p \vee q$ “.

§ 39

Výrokové funkce negace a disjunkce budeme skládat do složitějších, např. do funkcí

$$\begin{aligned} &\sim\sim p \\ &\sim p \vee q \\ &p \vee \sim q \\ &\sim p \vee \sim q \end{aligned}$$

To jsou zápisy výrokových funkcí, kterým rozumíme popořadě takto: jako výrokové funkci, jejíž hodnota je pravdivá, když je hodnota výrokové funkce $\sim p$ nepravdivá, a jejíž hodnota je nepravdivá, když je hodnota výrokové funkce $\sim p$ pravdivá; jako výrokové funkci, jejíž hodnota je pravdivá, když je hodnota aspoň jedné z výrokových funkcí $\sim p$ a q pravdivá, a jejíž hodnota je nepravdivá, když jsou hodnoty obou těchto funkcí nepravdivé; jako výrokové funkci, jejíž hodnota je pravdivá, když je hodnota aspoň jedné z výrokových funkcí p a $\sim q$ pravdivá, a jejíž hodnota je nepravdivá, když jsou hodnoty obou těchto funkcí nepravdivé; jako výrokové funkci, jejíž hodnota je pravdivá, když je hodnota aspoň jedné z výrokových funkcí $\sim p$ a $\sim q$ pravdivá, a jejíž hodnota je nepravdivá, když jsou hodnoty obou těchto funkcí nepravdivé.

Tam, kde je potřeba ukázat strukturu složení, užíváme v zápisu závorky:

$$\begin{aligned} &\sim(p \vee q) \\ &\sim(\sim p \vee q) \\ &\sim(p \vee \sim q) \\ &\sim(\sim p \vee \sim q) \\ &r \vee (p \vee q) \\ &(p \vee q) \vee r \\ &\sim(p \vee q) \vee r \end{aligned}$$

První čtyři jsou výrokové funkce, jejichž hodnota je pravdivá, když je hodnota výrokové funkce v závorce nepravdivá, a jejichž hodnota je nepravdivá, když je hodnota výrokové funkce v závorce pravdivá. Závorka v zápisu první z nich umožňuje rozlišit tuto výrokovou funkci od výrokové funkce $\sim p \vee q$ z předchozího výčtu, tyto výrokové funkce se liší pořadím negace a disjunkce při skládání: zatímco v případě výrokové funkce $\sim(p \vee q)$ byla

negovaná disjunkce, v případě výrokové funkce $\sim p \vee q$ je negace v disjunkci. Podobně závorka v zápisu $\sim(\sim p \vee q)$ umožňuje rozlišit takto zapsanou výrokovou funkci od výrokové funkce $\sim\sim p \vee q$. Zbývající tři zápisy v tomto výčtu jsou výrokové funkce složené postupně ze dvou disjunkcí, přičemž ve třetí z nich je mezi dvě disjunkce vložena ještě negace té první disjunkce.

Závorek může být i víc, a to buď na stejné úrovni, jako ve výrokové funkci

$$(p \vee q) \vee (p \vee r)$$

jejíž hodnota je pravdivá, je-li hodnota aspoň jedné z výrokových funkcí $p \vee q$ a $p \vee r$ pravdivá, a jejíž hodnota je nepravdivá, jsou-li hodnoty obou těchto funkcí nepravdivé, nebo mohou být vnořené, jako ve výrokových funkcích

$$\sim((p \vee q) \vee r)$$

$$\sim(\sim(p \vee q) \vee r)$$

$$\sim((p \vee q) \vee (p \vee r))$$

... atd.

§ 40

Tomu, že je výraz instancí výrokové funkce, rozumíme takto: Jedna výroková funkce je instancí druhé výrokové funkce, když všechny hodnoty té první jsou i hodnotami té druhé. Např. elementární výrokové funkce

Petr jde do školy p
 $p \vee$ Petr nese knihu Michalovi

$$p \vee q$$

$$\sim p \vee q$$

$$p \vee \sim q$$

$$\sim p \vee \sim q$$

$$r \vee (p \vee q)$$

$$(p \vee q) \vee r$$

$$\sim(p \vee q) \vee r$$

$$(p \vee q) \vee (p \vee r)$$

jsou všechny instancemi disjunkce, protože všechny jejich hodnoty, tj. všechny elementární výroky, kterými se stanou po udělení hodnot proměnným p, q a r , jsou hodnotami disjunkce. Naopak to ale s výjimkou třetí z nich, což je samotná disjunkce, není; např. elementární výrok

$\sim \text{Petr jde do školy} \vee \text{Petr nese knihu Michalovi}$

je hodnotou disjunkce, ale není žádnou hodnotou první uvedené výrokové funkce.

K instancím elementární výrokové funkce přecházíme současným dosazováním elementárních výrokových funkcí nebo elementárních výroků za proměnné. Např. současným dosazením $p \vee q$ za p a $p \vee r$ za q do disjunkce $p \vee q$ dostaneme

$$(p \vee q) \vee (p \vee r)$$

jako instanci disjunkce. Toto dosazení budeme zapisovat

$$p \vee q \ [p := p \vee q, q := p \vee r]$$

Když pak dále dosadíme např.

$$(p \vee q) \vee (p \vee r) \ [p := \text{Petr jde do školy}]$$

dostaneme

$$(\text{Petr jde do školy} \vee q) \vee (\text{Petr jde do školy} \vee r)$$

což je instance jak $(p \vee q) \vee (p \vee r)$, tak i původní $p \vee q$. Kdyby dosazení $p \vee q$ za p a $p \vee r$ za q do disjunkce $p \vee q$ nebylo současné, a dosadili bychom nejprve $p \vee q$ za p a až potom $p \vee r$ za q do $(p \vee q) \vee q$, výsledek by byl jiný.

Jako instance elementárních výrokových funkcí budeme brát i elementární výroky, které jsou jejich hodnotami.

§ 41

Protože tvrzením elementární výrokové funkce rozumíme tvrzení jakékoli její hodnoty, je její tvrzení i tvrzením jakékoli její instance.

§ 42

První podobou výchozích kroků, jež byla uvedena v § 21a, je definování. Definováním tu rozumíme zavedení zkratk; zavedeme postupně zkratky za tři výrokové funkce složené z negace a disjunkce:

- *1.01⁴ $p \rightarrow q$ je zkratka za $\sim p \vee q$
- *3.01 $p \wedge q$ je zkratka za $\sim(\sim p \vee \sim q)$
- *4.01 $p \leftrightarrow q$ je zkratka za $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

První z nich je implikace, druhá konjunkce a třetí ekvivalence. Implikace je tedy taková výroková funkce obsahující dvě proměnné, jejíž hodnota je pravdivá, když je hodnota aspoň jedné z výrokových funkcí $\sim p$ a q pravdivá, a jejíž hodnota je nepravdivá, když jsou hodnoty obou těchto funkcí nepravdivé; tj. je pravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty takové elementární výroky, že je-li ten první pravdivý, je pravdivý i ten druhý, a je-li ten první nepravdivý, na pravdivosti toho druhého nezáleží, a je nepravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty takové elementární výroky, že ten první je pravdivý a druhý nepravdivý. Konjunkce je taková výroková funkce obsahující dvě proměnné, jejíž hodnota je pravdivá, když je hodnota výrokové funkce $\sim p \vee \sim q$ nepravdivá, a jejíž hodnota je nepravdivá, když je hodnota této výrokové funkce pravdivá; tj. je pravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty takové elementární výroky, které jsou oba pravdivé, a je nepravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty takové elementární výroky, z nichž je aspoň jeden nepravdivý. Ekvivalence je výroková funkce obsahující dvě proměnné, jejíž hodnota je pravdivá, když jsou hodnoty obou výrokových funkcí $p \rightarrow q$ a $q \rightarrow p$ pravdivé, a jejíž hodnota je nepravdivá, když je hodnota aspoň jedné z nich nepravdivá; tj. je pravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty takové elementární výroky, že je-li ten první pravdivý, je pravdivý i ten dru-

4 Číslování kroků přebíráme z PM, slouží místo odkazů na stránky.

hý, a naopak, a je nepravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty takové elementární výroky, že ten první je pravdivý a druhý nepravdivý, nebo naopak. V implikaci budeme rozlišovat „přední člen“, tj. to, co je na místě první proměnné, a „zadní člen“, tj. to, co je na místě druhé proměnné. Tyto zkrácené umělé výrazy budou sloužit k stručnosti a přehlednosti zápisů, ale mohli bychom je kdykoli nahradit původními výrazy, aniž by se jakkoli změnil jejich smysl.

Nahrazování zkratk výrokovými funkcemi složenými z původních výrazů a naopak se bude týkat všech zkratk vyskytujících se ve výrokové funkci, nebo jen některých z nich. Např. výrokové funkce

$$\begin{aligned}(p \vee p) &\rightarrow p \\ \sim((p \vee q) &\rightarrow r) \\ (p \wedge q) &\rightarrow (q \wedge p) \\ (p \wedge q) &\leftrightarrow (q \wedge p)\end{aligned}$$

můžeme popořadě nahradit výrokovými funkcemi

$$\begin{aligned}\sim(p \vee p) &\vee p \\ \sim(\sim(p \vee q) &\vee r) \\ \sim\sim(\sim p \vee \sim q) &\vee \sim(\sim q \vee \sim p) \\ \sim(\sim(\sim(\sim p \vee \sim q) &\vee \sim(\sim q \vee \sim p))) \vee \sim(\sim(\sim q \vee \sim p) \vee \sim(\sim p \vee \sim q)))\end{aligned}$$

přičemž poslední z nich můžeme nahradit také výrokovými funkcemi

$$\begin{aligned}((p \wedge q) &\rightarrow (q \wedge p)) \wedge ((q \wedge p) \rightarrow (p \wedge q)) \\ (\sim(p \wedge q) &\vee (q \wedge p)) \wedge (\sim(q \wedge p) \vee (p \wedge q)) \\ \sim(\sim(\sim(p \wedge q) &\vee (q \wedge p)) \vee \sim(\sim(q \wedge p) \vee (p \wedge q)))\end{aligned}$$

a naopak.

§43

Definicí implikace si připravujeme stručný zápis výrokové funkce obsahující dvě proměnné, podle jejíchž hodnot se přenáší pravdivost hodnot jejího předního členu na hodnoty zadního členu. Tuto výrokovou funkci použijeme v pravidle inference.

§44

Druhou podobou výchozích kroků, jež byla uvedena v §21 b, je tvrzení výrokových funkcí zapsaných umělými výrazy. Budeme tvrdit několik výrokových funkcí:

- *1.2 $\vdash (p \vee p) \rightarrow p$
- *1.3 $\vdash q \rightarrow (p \vee q)$
- *1.4 $\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
- *1.5 $\vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (q \vee (p \vee r))$
- *1.6 $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$

Snadno si můžeme rozmyslet, s využitím definice implikace a výchozích myšlenek negace a disjunkce, že jakékoli hodnoty těchto výrokových funkcí jsou pravdivé: *1.2 je tvrzení výrokové funkce, jejíž hodnota je pravdivá, je-li pravdivá hodnota aspoň jedné z výrokových funkcí $\sim(p \vee p)$ a p , ať už ale hodnota p pravdivá je nebo není, a jedno z toho je, neboť je to výrok, hodnota jedné z těchto dvou výrokových funkcí pravdivá je, je-li totiž p pravdivá, pak té druhé, není-li pravdivá, pak té první. *1.3 je tvrzení výrokové funkce, jejíž hodnota je pravdivá, je-li pravdivá hodnota aspoň jedné z výrokových funkcí $\sim q$ a $p \vee q$, ať už ale hodnota q pravdivá je nebo není, hodnota jedné z těchto dvou výrokových funkcí pravdivá je bez ohledu na pravdivost hodnoty p . *1.4 je tvrzení výrokové funkce, jejíž hodnota je pravdivá, je-li pravdivá hodnota aspoň jedné z výrokových funkcí $\sim(p \vee q)$ a $q \vee p$, jsou-li tedy nepravdivé hodnoty obou výrokových funkcí p a q , nebo je-li aspoň jedna z nich pravdivá, a to ale znamená bez ohledu na jejich pravdivost. *1.5 je tvrzení výrokové funkce, jejíž hodnota je pravdivá, je-li pravdivá hodnota aspoň jedné z výrokových funkcí $\sim(p \vee (q \vee r))$ a $q \vee (p \vee r)$, jsou-li tedy nepravdivé hodnoty všech výrokových funkcí p , q a r , nebo je-li aspoň jedna z nich pravdivá, a to ale opět znamená bez ohledu na jejich pravdivost. *1.6 je tvrzení výrokové funkce, jejíž hodnota je pravdivá, je-li pravdivá hodnota aspoň jedné z výrokových funkcí $\sim(q \rightarrow r)$ a $(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$, a tedy výrokových funkcí $\sim(\sim q \vee r)$ a $\sim(p \vee q) \vee (p \vee r)$, a to rozmyslíme takto: buď je už hodnota první z nich pravdivá, nebo je nepravdivá, ale pak je pravdivá hodnota výrokové funkce $\sim q \vee r$, a tedy aspoň jedné z výrokových funkcí $\sim q$ a r , a je-li pravdivá hodnota $\sim q$, je pravdivá v případě pravdivosti hodnoty p druhá část disjunkce $\sim(p \vee q) \vee (p \vee r)$ a v případě nepravdivosti hodnoty p její první část, a je-li pravdivá hodnota r , je pravdivá její druhá část.

Tato tvrzení budeme používat především takto: pomocí *1.2 budeme přidávat tvrzení výrokových funkcí jedné proměnné; pomocí *1.3 výrokových funkcí jedné nebo dvou proměnných, v nichž ale na jedné z nich nebude záležet; pomocí *1.4 budeme otáčet pořadí členů v disjunkci nebo, s náležitou pozorností k negacím, i v implikaci, protože implikace je definovaná jako disjunkce s negací; pomocí *1.5 budeme přeskupovat vnořené disjunkce nebo implikace, s náležitou pozorností k pořadí vnoření, protože v implikaci na pořadí záleží; a pomocí *1.6 budeme spojovat dvě disjunkce nebo implikace tak, aby implikovaly třetí.

§45

Budeme-li z tvrzení elementárních výrokových funkcí přecházet k tvrzením jejich instancí, budeme je používat jako pravidla; budeme-li z nich nebo z jejich instancí přecházet inferencí k dalším tvrzením, budeme je používat jako předpoklady.

§46

Třetí podobou výchozích kroků, jež byla uvedena ve zbývajících položkách §21, je tvrzení pravidel nezapsaných umělými výrazy. Nejprve ukážeme pravidlo inference pro elementární výroky a výrokové funkce:

- *1.1 Cokoli implikovaného pravdivým elementárním výrokem je pravdivé
- *1.11 Je pravdivá jakákoli hodnota elementární výrokové funkce, která je implikovaná elementární výrokovou funkcí, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá

Pravidlo *1.11 je jen rozvinutím pravidla *1.1 s ohledem na tvrzení elementárních výrokových funkcí; uvědomme si totiž, že tvrzením elementární výrokové funkce rozumíme tvrzení jakékoli její hodnoty. Tím, že něco je něčím implikované, rozumíme, že je to zadním členem tvrzené implikace, ať už jde o elementární výrok, nebo o elementární výrokovou funkci (tvrzení této implikace a tvrzení jejího předního členu říkáme v této souvislosti „předpoklady“).

Pravidlo inference není podmínkový výrok, přestože tak může vypadat. Nerozumíme mu jako výroku „Jestliže je pravdivá implikace a její přední člen, je pravdivý i její zadní člen“; to je sice také pravda, ale je to jiný výrok. Rozumíme mu jako nepodmíněnému výroku o určitých výrociích a výrokových funkcích, přesně řečeno o těch, které jsou implikované něčím tvrzeným: říká o nich, že se na ně, nebo na jejich hodnoty přenáší podle pravdivé implikace pravdivost z něčeho pravdivého. Snadno si rozmyslíme, že je to výrok pravdivý, protože k tomu byla implikace připravená. K odůvodnění nepodmíněnosti a k dalším úvahám o tomto pravidle se vrátíme ve třetí kapitole.

Ted' nás zajímá, jak ho při přecházení k novým tvrzením budeme používat. To budeme dělat dvojím způsobem:

- a) ve směru od výchozích tvrzení k následným: budeme mít dvě tvrzení a uvidíme, že jedno z nich tvrdí implikaci a druhé její přední člen, a rozhodneme se přejít k dalšímu tvrzení, v němž budeme tvrdit zadní člen této implikace
- b) v opačném směru: budeme chtít něco tvrdit a budeme hledat, jaká dvě tvrzení, z nichž jedno tvrdí implikaci, jejíž přední člen je tvrzený v tom druhém a zadní člen je to naše tvrzení, bychom našli v dosavadním postupu jako předpoklady, a pokud taková nenajdeme, jak bychom k takovým tvrzením mohli dojít

§ 47

Kdybychom nechtěli v pravidle inference využít zavedenou zkratku, mohly by jeho formulace vypadat takto:

- *1.1** Cokoli, co je v pravdivé disjunkci s negací pravdivého elementárního výroku, je pravdivé
- *1.11** Je pravdivá jakákoli hodnota elementární výrokové funkce, která je v takové disjunkci s elementární výrokovou funkcí, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá

Smysl pravidel by se tím nijak nezměnil, ale nebylo by z nich vidět, jak analyzujeme přenášení pravdivosti.

§ 48

Nemůžeme ukázat použití pravidla inference na příkladech, aniž bychom začali – třeba jen dočasně a pokusně – k nějakým tvrzením přecházet.

§ 49

Dalším výchozím krokem je tvrzení pravidel zachování elementárnosti výroků a výrokových funkcí, která také nejsou zapsaná umělými výrazy:

- *1.7 Negace elementárního výroku je elementární výrok
- *1.71 Disjunkce dvou elementárních výroků je elementární výrok

Že jde o pravdivé výroky, si z výchozích myšlenek elementárního výroku, negace a disjunkce snadno rozmyslíme takto: negace elementárního výroku, tedy hodnota výrokové funkce negace, jejíž proměnné udělíme jako hodnotu daný elementární výrok, je výrokem a neobsahuje žádné proměnné, a tedy ani žádné vázané proměnné, které daný elementární výrok neobsahoval; podobně disjunkce dvou elementárních výroků, tedy hodnota výrokové funkce disjunkce, jejímž proměnným udělíme jako hodnoty dané elementární výroky, je výrokem a neobsahuje žádné proměnné, které dané elementární výroky neobsahovaly. Např. negace elementárního výroku

Petr jde do školy

je

~ Petr jde do školy

a tento výrok neobsahuje také žádné proměnné, a je tedy elementární.

Uvedená pravidla mají ovšem důsledky i pro elementární výrokové funkce. Negace elementární výrokové funkce je podle nich také elementární výrokovou funkcí, protože její hodnoty, tedy negace hodnot původní elementární výrokové funkce, tedy elementárních výroků, jsou také elementární výroky. Podobně pro disjunkci: disjunkce dvou elementárních výrokových funkcí je elementární výroková funkce, protože její hodnoty,

tedy disjunkce hodnot původních elementárních výrokových funkcí, jsou také elementární výroky. Máme-li např. elementární výrokové funkce

$$\sim p$$

$$\sim q$$

bude jejich disjunkce $\sim p \vee \sim q$ také elementární výrokovou funkcí, protože její hodnoty jsou disjunkcemi jejich hodnot.

Skládáme-li opakovaně elementární výroky pomocí negace a disjunkce do složitějších výroků, nebo elementární výrokové funkce s výrokovými funkcemi negace a disjunkce do složitějších výrokových funkcí, budou podle těchto pravidel výsledky skládání také elementárními výroky nebo elementárními výrokovými funkcemi. Ostatně, výchozí myšlenky negace a disjunkce jsou takové, že tyto funkce nejen nepřidávají proměnné, ale jako hodnoty svých proměnných potřebují elementární výroky, tedy výroky neobsahující žádné vázané proměnné. Abychom tedy mohli elementární výroky jejich pomocí opakovaně skládat, musí elementárnost zachovávat; stejně tak, aby byly hodnoty výsledku opakovaného skládání výrokových funkcí negace a disjunkce pravdivé nebo nepravdivé, musí ji skládání zachovávat.

Tato pravidla používáme při skládání výrokových funkcí, které tvrdíme, nebo které dosazujeme při přecházení k instancím za proměnné.

§50

Pravidla zachování elementárnosti výroků a výrokových funkcí budeme v důkazech používat zprvu, tj. v §54, tiše, což ale neznamená, že podle nich nebudeme postupovat.

§51

Posledním výchozím krokem v této analýze je tvrzení pravidla identifikace proměnné:

- *1.72** Disjunkce dvou elementárních výrokových funkcí obsahujících tytéž proměnné je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech

Pravidla zachování elementárnosti výroků a výrokových funkcí (tj. *1.7 a *1.71) říkají, že všechny výroky poskládané z elementárních výroků pomocí negace a disjunkce jsou také elementární a že všechny výrokové funkce poskládané z elementárních výrokových funkcí a výrokových funkcí negace a disjunkce jsou také elementární. Neříkají ale, že takto poskládáme výrokové funkce, které obsahují tutéž proměnnou, nebo tytéž proměnné, je-li jich víc, v různých členech disjunkcí. To, že skládáním dvou elementárních výrokových funkcí obsahujících tutéž proměnnou, nebo tytéž proměnné, je-li jich víc, dostaneme výrokovou funkci, v níž se proměnné ze skládaných členů identifikují, je další pravdivý výrok.

Jinými slovy: proměnné nedrží svou identitu pouze v rámci jednotlivých výrazů, ale chceme-li, podrží si ji i mezi výrazy. Složíme-li např. elementární výrokové funkce

$$\sim p$$

$$\sim \sim p$$

do disjunkce, dostaneme elementární výrokovou funkci $\sim p \vee \sim \sim p$ obsahující jednu proměnnou. Protože sama o sobě není výroková funkce $\sim \sim p$ odlišná od $\sim \sim q$, mohli bychom je také složit do $\sim p \vee \sim \sim q$ obsahující dvě proměnné, jejíž je $\sim p \vee \sim \sim p$ instancí; podle *1.72 ale identitu p někdy zachováváme. Takto jsou složeny i všechny elementární výrokové funkce tvrzené v *1.2 až *1.6.

§52

Pravidlo *1.72 budeme také používat zprvu, tj. v §54, tiše. Společně s pravidlem inference říká o proměnných obsažených v elementárních výrokových funkcích v důkazech: ať už elementární výrokové funkce rozkládáme (při přechodech k zadním členům implikací) nebo skládáme (ve výchozích tvrzeních a při přechodech k instancím už tvrzených elementárních výrokových funkcí), proměnné si zachovávají identitu, a tedy výsledné elementární výrokové funkce se stanou výroky právě pro ty hodnoty svých proměnných, pro něž se stanou výroky ty elementární výrokové funkce v důkazu, které tyto proměnné obsahují.

§53

Výchozí kroky nebyly voleny podle toho, že by byly nejsnáze nahlédnutelné, samozřejmě, nebo že by nějak podstatně předcházely ostatním, ale jen podle toho, že výroky v nich tvrzené nebo jakékoli hodnoty výrokových funkcí v nich tvrzených jsou pravdivé a že se nám z nich podaří, při jejich poměrně nízkém a přehledném počtu, dojít k ostatním.

§54

K dalším krokům této analýzy už přecházíme z výchozích kroků. Ukážeme teď přechody k dalším tvrzením elementárních výrokových funkcí zapsaných umělými výrazy a jejich důkazy. Budeme přitom sledovat původní postup, který autoři zvolili.⁵

Uvedeme vždy tvrzení, jeho důkaz a úvahu o něm:

***2.01** $\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$

Důkaz:

*1.2 [p := $\sim p$]	$\vdash (\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$	(1)
(1), *1.01	$\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$	

Zápisu důkazu tu rozumíme takto: v prvním řádku tvrdíme instanci elementární výrokové funkce tvrzené v *1.2, která vznikne dosazením $\sim p$ na místo p , a toto tvrzení pro další odkazování v zápise důkazu označujeme (1); v druhém řádku pak v předcházejícím tvrzení nahrazujeme disjunkci s negací předního členu implikací podle definice implikace, tj. podle *1.01 je $p \rightarrow \sim p$ zkratka za $\sim p \vee \sim p$. Před znakem $\vdash$ zapisujeme, o jaké dosavadní kroky se při přechodu k novému tvrzení opíráme.

Můžeme si sami rozmyslet, že jakákoli hodnota výrokové funkce tvrzené v *2.01 je pravdivá. Vyjdeme-li z našeho rozmyšlení pravdivosti hodnot implikace z §42, usoudíme, že je-li hodnota p pravdivá, je hodnota $p \rightarrow \sim p$ nepravdivá, protože hodnota předního členu této implikace je pravdivá a zadního nepravdivá, a hodnota $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$ je tedy pravdivá bez

⁵ Skoro všechny uvedené důkazy jsou převzaté z PM, jen jsou v některých případech rozvedené.

ohledu na pravdivost zadního členu této implikace, a je-li hodnota p nepravdivá, je hodnota $p \rightarrow \sim p$ pravdivá, protože hodnota předního členu této implikace je nepravdivá a na hodnotě zadního členu v tom případě nezáleží, a hodnota $\sim p$ je také pravdivá, takže hodnota $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$ je pravdivá. Uvědomme si, že toto rozmyšlení vycházelo z definice implikace a myšlenek disjunkce a negace stejně jako následující rozmyšlení: hodnota $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$ je podle definice implikace pravdivá, je-li pravdivá hodnota aspoň jedné z výrokových funkcí $\sim(p \rightarrow \sim p)$ a $\sim p$, a to je, protože buď je pravdivá hodnota p , a v tom případě je pravdivá hodnota $\sim(\sim p \vee \sim p)$, čehož zkratkou je $\sim(p \rightarrow \sim p)$, nebo je pravdivá hodnota $\sim p$. Důkaz toto naše druhé rozmyšlení předvádí: ukazuje, že tuto úvahu jsme už udělali u výrokové funkce tvrzené v *1.2 a tady jde jen o její instanci zapsanou pomocí zkratky.

Jak bychom takový důkaz vymysleli?

- a) ve směru od výchozích kroků k dalším: do *1.2 jsme dosadili za p nejjednodušší výrokovou funkci složenou pomocí negace a zajímalo nás, co vznikne; potom jsme zápis přepsali pomocí zkratky a ve výsledku jsme rozpoznali tradiční schéma argumentu redukci ad absurdum. Tak ale asi důkaz vymyšlený nebyl, nejdříve byla známá výroková funkce tvrzená v *2.01 a k ní se hledal důkaz, ať už pro její vlastní důležitost, nebo proto, že je potřeba v dalších důkazech
- b) v opačném směru: chtěli jsme dojít k tvrzení *2.01 a hledali cestu, jak se k němu dostat z našich výchozích kroků. Nejsnazší by bylo, kdyby to byla instance nějaké výrokové funkce tvrzené ve výchozích krocích, to bychom už její tvrzení vlastně měli. Jinak bychom k ní, nebo k něčemu, čeho by byla instancí, přešli inferencí, a pokud by ani to nešlo, doplnili bychom nějaké další výchozí kroky, nebo změnili ty, které teď máme. V tomto případě stačí úvaha: protože jde o elementární výrokovou funkci jedné proměnné, nabízí se buď *1.2, nebo ostatní výchozí tvrzení *1.3 až *1.6, v nichž bychom ale snížili počet proměnných přechodem k jejich instancím, tj. dosazovali bychom v nich za q , a případně i za r , to samé, co za p . Protože jde ale o implikaci, jejíž přední člen je také implikace, nabízí se nejvíce *1.2, jejíž přední člen je disjunkce, a tedy něco, co se s patřičnou pozorností k negacím implikaci podobá. Protože zadní člen našeho tvrzení je v negaci, hodilo by se za p dosadit $\sim p$, a přitom zjistíme, že z předního členu elementární výrokové funkce tvrzené v *1.2 se stane něco, co pomocí zkratky přepíšeme jako přední člen, který hledáme

Tvrzení *2.01 budeme dále používat při přecházení k negacím. Kdybychom měli o nějaké elementární výrokové funkci tvrzení, že implikuje svoji negaci, pomocí vhodné instance elementární výrokové funkce tvrzené v *2.01 a inference bychom přešli k tvrzení její negace.

Dalších několik tvrzení má důkaz podobný:

$$\text{*2.02} \quad \vdash q \rightarrow (p \rightarrow q)$$

Důkaz:

$$\begin{array}{ll} \text{*1.3 } [p := \sim p] & \vdash q \rightarrow (\sim p \vee q) \\ (1), \text{*1.01} & \vdash q \rightarrow (p \rightarrow q) \end{array} \quad (1)$$

Tady jde o rozpoznání, že elementární výroková funkce tvrzená v *2.02 je instancí elementární výrokové funkce tvrzené v *1.3 zapsanou pomocí zkratky. Opět bychom si mohli sami rozmyslet, že jakákoli hodnota této výrokové funkce je pravdivá, a toto rozmyšlení by opět postupovalo jako uvedený důkaz. Použití tvrzení *2.02 se ukáže až dále v souvislosti s konjunkcí. Prozatím počkáme, k čemu bude dobré.

$$\text{*2.03} \quad \vdash (p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$$

Důkaz:

$$\begin{array}{ll} \text{*1.4 } [p := \sim p, q := \sim q] & \vdash (\sim p \vee \sim q) \rightarrow (\sim q \vee \sim p) \\ (1), \text{*1.01} & \vdash (p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p) \end{array} \quad (1)$$

To je z našich výchozích kroků nejsnáze dokazatelná podoba principu transpozice, tj. otočení implikace při záměně negací u jejích členů; zbývající tři podoby uvedeme později.

$$\text{*2.04} \quad \vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$$

Důkaz:

$$\begin{array}{ll} \text{*1.5 } [p := \sim p, q := \sim q] & \vdash (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \rightarrow (\sim q \vee (\sim p \vee r)) \\ (1), \text{*1.01} & \vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)) \end{array} \quad (1)$$

Elementární výroková funkce tvrzená v *2.04 je tedy zkratkou instance elementární výrokové funkce tvrzené v *1.5. Její další použití bude především takové, že s pomocí jejích instancí budeme prohazovat přední členy ve vno-

řených implikacích. Vnoření ovšem musí být na místě zadního členu vnější implikace, nikoli na místě jejího předního členu.

$$\text{*2.05} \quad \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

Důkaz:

$$\text{*1.6 } [p := \sim p] \quad \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\sim p \vee q) \rightarrow (\sim p \vee r)) \quad (1)$$

$$(1), \text{*1.01} \quad \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

To je první podoba principu sylogismu, tj. přechodu ze dvou navazujících implikací k implikaci mezi prvním a třetím členem. Tento princip budeme dále často používat.

Následující tvrzení, které je další podobou principu sylogismu, má důkaz složitější, navazuje na už dříve provedené kroky a budeme v něm postupovat podle pravidla inference:

$$\text{*2.06} \quad \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

Důkaz:

$$\text{*2.04 } [p := q \rightarrow r, q := p \rightarrow q, r := p \rightarrow r]$$

$$\begin{aligned} &\vdash ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \\ &\rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{*2.05} \quad \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{*1.11} \quad \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

Třetím řádkem v tomto zápise důkazu rozumíme to, že k tvrzení přecházíme podle pravidla inference, tvrzeného v *1.11, a jako předpoklady inference používáme řádky (1) a (2).

Budeme-li si sami rozmýšlet z výchozích myšlenek, že jakékoli hodnoty výrokových funkcí tvrzených v *2.05 a *2.06 jsou pravdivé, bude to už úvaha poměrně komplikovaná s ohledem na tři proměnné a mnohonásobné použití definice implikace. Pokud ale v rozmýšlení vyjdeme z nějakých už dosažených myšlenek, např. že implikace je přenášením pravdivosti, stane se pravdivost jejich hodnot snadno pochopitelná. Ve vlastním rozmýšlení si tak s rostoucí složitostí tvrzených elementárních výrokových funkcí nejspíše vytvoříme pomocné myšlenky a postupy, které budou buď podobné předváděnému postupu důkazů, nebo budou jeho alternativou (např. „ta-

bulkovou metodu“). Náš důkaz předváděl tuto úvahu: pomocí *2.04 přehazujeme přední členy ve vnořených implikacích, a tedy i v *2.05.

Jak bychom takový důkaz vymysleli? Znovu se na to podívejme dvojím způsobem:

- a) ve směru od výchozích kroků k dalším: máme už tvrzení *2.04 a v něm současně dosadíme $q \rightarrow r$ za p , $p \rightarrow q$ za q a $p \rightarrow r$ za r . Tak jsme došli k řádku (1) a rozpoznali, že přední člen tvrzené elementární výrokové funkce je elementární výrokovou funkcí tvrzenou v *2.05; tu jsme do důkazu přidali jako řádek (2). Podle pravidla inference pak přejdeme k zadnímu členu implikace tvrzené v řádku (1). Tak ale důkaz asi také vymyšlený nebyl, protože jak by nás napadlo dosazovat zrovna tyto tři implikace? Stejně složitých kombinací je přeci příliš mnoho
- b) v opačném směru: chtěli jsme dokázat elementární výrokovou funkci vzniklou přehazením předních dvou implikací v *2.05 a věděli jsme, že takové prohazování děláme pomocí *2.04. Hledali jsme tedy vhodné dosazení do *2.04, které by vedlo k příslušné inferenci

Další tvrzení je jenom pomocné a jeho důkaz je jednoduchý:

***2.07** $\vdash p \rightarrow (p \vee p)$

Důkaz:

*1.3 $[q := p] \quad \vdash p \rightarrow (p \vee p)$

Jde o instanci elementární výrokové funkce tvrzené v *1.3, v níž na místo jedné proměnné dosadíme tu druhou. Dostali jsme se tak k implikaci opačné k té, která je tvrzena v *1.2; obě dvě použijeme v důkazu následujícího tvrzení:

***2.08** $\vdash p \rightarrow p$

Důkaz:

*2.05 $[q := p \vee p, r := p]$	$\vdash ((p \vee p) \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (p \vee p))$	
	$\rightarrow (p \rightarrow p))$	(1)
*1.2	$\vdash (p \vee p) \rightarrow p$	(2)
(1), (2), *1.11	$\vdash (p \rightarrow (p \vee p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$	(3)
*2.07	$\vdash p \rightarrow (p \vee p)$	(4)
(3), (4), *1.11	$\vdash p \rightarrow p$	

Rozmyslet si, že je jakákoli hodnota tvrzené elementární výrokové funkce pravdivá, je tentokrát snazší, než pochopit nebo vymyslet uvedený důkaz. To bude ještě výraznější u dalšího tvrzení, teď se jenom podívejme, jak mohl být důkaz vymyšlený: chtěli jsme dokázat implikaci $p \rightarrow p$; vypadá to, že z dosavadních tvrzení bychom k ní mohli inferencí přejít přímo z instancí *2.02, *2.04 a obou podob principu sylogismu, tj. z *2.05 a *2.06, a nepřímou, s použitím definice implikace, z instancí *1.3, *1.4, *1.5 a *1.6. Promyslíme přímé cesty, ty nepřímé přes ně stejně vedou. Kdybychom dosadili do *2.02 p za q , dostali bychom $p \rightarrow (p \rightarrow p)$, z čehož bychom ale k naší implikaci přešli inferencí jen z tvrzení elementární výrokové funkce p , které nemáme a ani jej nechceme, protože by to znamenalo, že bychom tvrdili vůbec jakoukoli elementární výrokovou funkci, všechny jsou totiž jeho instancemi. Do *2.04 bychom mohli dosadit p za r a dostat $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow p))$, kde přední člen implikace je tvrzený v *2.02 (jen proměnné jsou prohozené), a přešli bychom inferencí ke $q \rightarrow (p \rightarrow p)$. Za q bychom potom už dosadili jakoukoli elementární výrokovou funkci, jejíž tvrzení už máme, a inferencí bychom důkaz dokončili. V uvedeném důkazu ale bylo použito tvrzení *2.05: dosadili jsme p za r a dostali $(q \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$, zbývalo najít vhodné dosazení za q , k němuž bychom našli tvrzení jak příslušné instance $q \rightarrow p$, tak i $p \rightarrow q$. Pro první z nich se nabízí *1.2, pro druhou jsme si připravili *2.07. Podobně bychom mohli použít i *2.06 a potom *1.2 a *2.07 použít v opačném pořadí.

***2.1** $\vdash \sim p \vee p$

Důkaz:

*2.08, *1.01 $\vdash \sim p \vee p$

Důkazem je tu rozepsání zkratky v *2.08. Při rozmyšlení pravdivosti jakýchkoli hodnot předcházejících tvrzení, včetně těch z výchozích kroků, jsme vycházeli z myšlenky, že výroky jsou pravdivé nebo nepravdivé, a tady že pro určitou hodnotu proměnné p je pravdivá aspoň jedna z hodnot elementárních výrokových funkcí p a $\sim p$, jsou-li to výroky. Proto bychom mohli mít dojem, že tvrzení *2.1 by mělo být výchozím krokem. Podle §53 jsou ale výchozí kroky vybírány podle toho, jak se nám z nich daří dojít k ostatním; a k *2.1 se nám dojít podařilo, což stačí.

*2.1 je první podobou zákona vyloučeného třetího. Jeho druhá podoba spočívá v otočení členů disjunkce:

***2.11** $\vdash p \vee \sim p$

Důkaz:

*1.4 $[p := \sim p, q := p] \quad \vdash (\sim p \vee p) \rightarrow (p \vee \sim p) \quad (1)$

*2.1 $\vdash \sim p \vee p \quad (2)$

(1), (2), *1.11 $\vdash p \vee \sim p$

Důkazy následujících dvou tvrzení, která budou dvěma podobami principu dvojité negace, jsou ve sledovaném postupu různě složité, přestože samotné výrokové funkce jsou složité stejně:

***2.12** $\vdash p \rightarrow \sim \sim p$

Důkaz:

*2.11 $[p := \sim p] \quad \vdash \sim p \vee \sim \sim p \quad (1)$

(1), *1.01 $\vdash p \rightarrow \sim \sim p$

K první podobě tohoto principu jsme tedy došli jen jako ke zkratce z instance elementární výrokové funkce tvrzené v *2.11. Druhá podoba má důkaz rozdělený na dvě části, protože jedno v něm použité tvrzení zaslouží samostatnou pozornost. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení:

***2.13** $\vdash p \vee \sim \sim \sim p$

Důkaz:

*1.6 $[q := \sim p, r := \sim \sim \sim p] \quad \vdash (\sim p \rightarrow \sim \sim \sim p) \rightarrow ((p \vee \sim p) \rightarrow (p \vee \sim \sim \sim p)) \quad (1)$

*2.12 $[p := \sim p] \quad \vdash \sim p \rightarrow \sim \sim \sim p \quad (2)$

(1), (2), *1.11 $\vdash (p \vee \sim p) \rightarrow (p \vee \sim \sim \sim p) \quad (3)$

*2.11 $\vdash p \vee \sim p \quad (4)$

(3), (4), *1.11 $\vdash p \vee \sim \sim \sim p$

Při rozmyšlení o pravdivosti této elementární výrokové funkce nás asi napadne, že negace mění pravdivost na nepravdivost a naopak, a proto jejich lichý počet je stejný, jako by byla jedna, a pak s touto myšlenkou použijeme zákon vyloučeného třetího. To je ale úvaha, která je tu z velké části nadbytečná. Důkaz ukazuje jednodušší postup: stačí, spojíme-li disjunkci

z *2.11 s vhodnou instancí implikace z *2.12; takové spojování děláme pomocí *1.6 a zbývá jen najít jeho vhodnou instanci.

Důkaz druhé podoby principu dvojité negace je pak tento:

***2.14** $\vdash \sim\sim p \rightarrow p$

Důkaz:

*1.4 $[q := \sim\sim\sim p]$ $\vdash (p \vee \sim\sim\sim p) \rightarrow (\sim\sim\sim p \vee p)$ (1)

*2.13 $\vdash p \vee \sim\sim\sim p$ (2)

(1), (2), *1.11 $\vdash \sim\sim\sim p \vee p$ (3)

(3), *1.01 $\vdash \sim\sim p \rightarrow p$

V tomto důkazu už jenom otočíme členy v disjunkci a výsledek zapíšeme zkratkou.

Dále ukážeme tvrzení

***2.2** $\vdash p \rightarrow (p \vee q)$

Důkaz:

*1.3 $[p := q, q := p]$ $\vdash p \rightarrow (q \vee p)$ (1)

*1.4 $[p := q, q := p]$ $\vdash (q \vee p) \rightarrow (p \vee q)$ (2)

*2.06 $[q := q \vee p, r := p \vee q]$ $\vdash (p \rightarrow (q \vee p))$
 $\rightarrow (((q \vee p) \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \vee q)))$ (3)

(1), (3), *1.11 $\vdash ((q \vee p) \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \vee q))$ (4)

(2), (4), *1.11 $\vdash p \rightarrow (p \vee q)$

Na *2.2 je na první pohled asi vidět, že jde o obdobu *1.3, jen proměnné jsou opačně a pořadí členů v disjunkci je otočené. Mohli bychom mít dojem, že k důkazu tedy stačí jenom výchozí tvrzení *1.3 a *1.4, pomocí něhož otáčíme členy v disjunkci. To bychom ale přehlédli, že ke spojení těchto dvou tvrzení potřebujeme ještě princip sylogismu, tj. např. *2.06, a tedy jeho prostřednictvím další výchozí krok, a to *1.6.

Takovýto důkaz budeme zkráceně zapisovat

*1.3 $[p := q, q := p]$ $\vdash p \rightarrow (q \vee p)$ (1)

*1.4 $[p := q, q := p]$ $\vdash (q \vee p) \rightarrow (p \vee q)$ (2)

(1), (2), *2.06 $\vdash p \rightarrow (p \vee q)$

Poslednímu řádku zápisu tu rozumíme jako zkratce za vhodné dosazení do *2.06 a dvě inference využívající postupně výsledek dosazení a (1) a (2) jako předpoklady. Pomocí zkrácených zápisů budeme udržovat důkazy přehledné.

$$\text{*2.21} \quad \vdash \sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$$

Důkaz:

$$\begin{array}{ll} \text{*2.2 } [p := \sim p] & \vdash \sim p \rightarrow (\sim p \vee q) \\ (1), \text{*1.01} & \vdash \sim p \rightarrow (p \rightarrow q) \end{array} \quad (1)$$

Přechod k tomu tvrzení je jednoduchý, jde jen o zkrácenou instanci *2.2. Je to tradiční schéma argumentu „*ex falso sequitur quodlibet*“, pomocí něhož z tvrzení negace nějaké elementární výrokové funkce přejdeme inferencí k tvrzení, že tato výroková funkce implikuje cokoliv. Kdyby tedy naše výchozí kroky vedly ke sporu, tj. k tvrzení jakékoli elementární výrokové funkce i její negace, pomocí *2.21 bychom pak mohli přejít k tvrzení čehokoli.

Další tři tvrzení jsou různými podobami principu, podle něhož na pořadí členů a na závorkách ve vnořených disjunkcích nezáleží:

$$\text{*2.3} \quad \vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (p \vee (r \vee q))$$

Důkaz:

$$\text{*1.4 } [p := q, q := r] \quad \vdash (q \vee r) \rightarrow (r \vee q) \quad (1)$$

$$\begin{array}{ll} \text{*1.6 } [q := q \vee r, r := r \vee q] & \vdash ((q \vee r) \rightarrow (r \vee q)) \\ & \rightarrow ((p \vee (q \vee r)) \rightarrow (p \vee (r \vee q))) \end{array} \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{*1.11} \quad \vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (p \vee (r \vee q))$$

Tady potřebujeme jen otočit pořadí členů disjunkce a samozřejmě k tomu použijeme *1.4. Nemuselo by nám ale být na první pohled patrné, jak udělat tento přechod ve vnořeném členu další disjunkce, což děláme pomocí vhodného dosazení do *1.6.

$$\text{*2.31} \quad \vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow ((p \vee q) \vee r)$$

Důkaz:

$$\text{*2.3} \quad \vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (p \vee (r \vee q)) \quad (1)$$

$$\text{*1.5 } [q := r, r := q] \quad \vdash (p \vee (r \vee q)) \rightarrow (r \vee (p \vee q)) \quad (2)$$

$$(1), (2), *2.05 \quad \vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (r \vee (p \vee q)) \quad (3)$$

$$*1.4 [p := r, q := p \vee q] \quad \vdash (r \vee (p \vee q)) \rightarrow ((p \vee q) \vee r) \quad (4)$$

$$(3), (4), *2.05 \quad \vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow ((p \vee q) \vee r)$$

Postupně jsme tu upravovali elementární výrokovou funkci, a tyto úpravy byly zřetězené do implikací. Takovýto důkaz, sám už zkrácený, budeme dále zkracovat takto:

$$*2.3 \quad \vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (p \vee (r \vee q)) \quad (1)$$

$$*1.5 [q := r, r := q] \quad \vdash \dots \rightarrow (r \vee (p \vee q)) \quad (2)$$

$$*1.4 [p := r, q := p \vee q] \quad \vdash \dots \rightarrow ((p \vee q) \vee r)$$

Třem tečkám rozumíme v tomto zápise jako zkratce za zapsání tvrzení uvedeného zápisem vlevo od znaku $\vdash$, vhodné dosazení do *2.05 nebo *2.06 a dvě inference, resp. za zapsání příslušného řádku a přechod pomocí už zkráceného zápisu s principem sylogismu.

$$*2.32 \quad \vdash ((p \vee q) \vee r) \rightarrow (p \vee (q \vee r))$$

Důkaz:

$$*1.4 [p := p \vee q, q := r] \quad \vdash ((p \vee q) \vee r) \rightarrow (r \vee (p \vee q)) \quad (1)$$

$$*1.5 [p := r, q := p, r := q] \quad \vdash \dots \rightarrow (p \vee (r \vee q)) \quad (2)$$

$$*2.3 [q := r, r := q] \quad \vdash \dots \rightarrow (p \vee (q \vee r))$$

Jak bychom důkazy *2.31 a *2.32 vymysleli? K použití se nabízejí především *1.4 a *1.5, s jejichž pomocí otáčíme pořadí členů v disjunkcích a prohazujeme je ve vnořených disjunkcích. Pokusíme se tedy nejprve použít je a pak uvidíme, co nám chybí. Chceme-li dojít v důkaze *2.31 k $(p \vee q) \vee r$, dostali bychom se k němu pomocí vhodné instance *1.4 z $r \vee (p \vee q)$, a k tomu bychom se dostali pomocí vhodné instance *1.5 z $p \vee (r \vee q)$; k tomu bychom se dostali z předního členu dokazované implikace pomocí *2.3. Proto také asi *2.31 na *2.3 v tomto postupu přímo navazuje. Důkaz *2.32 vede prostě opačným směrem, ale mohli bychom uvažovat i takto: kdybychom se k $p \vee (q \vee r)$ chtěli dostat pomocí vhodné instance *1.5 z $q \vee (p \vee r)$, a k ní pomocí vhodné instance *1.4 z $(p \vee r) \vee q$, potřebovali bychom na začátek důkazu tvrzení, pomocí něhož bychom v $(p \vee q) \vee r$ prohodili q a r ; takové ale zatím nemáme. Kdybychom ale jako poslední úpravu použili prohození členů vnořené disjunkce z *2.3, stačilo by nám

dostat se uvedeným postupem k $p \vee (r \vee q)$ z $(p \vee q) \vee r$, a to je přední člen dokazované implikace.

Následující tvrzení je obdobou *1.6, jen s opačným pořadím proměnných v disjunkcích:

$$\text{*2.38} \quad \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))$$

Důkaz:

$$\text{*2.06} [p := q \vee p, q := p \vee q, r := p \vee r]$$

$$\begin{aligned} &\vdash ((q \vee p) \rightarrow (p \vee q)) \\ &\rightarrow (((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (p \vee r))) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{*1.4} [p := q, q := p] \quad \vdash (q \vee p) \rightarrow (p \vee q) \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{*1.11} \quad \vdash ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (p \vee r)) \quad (3)$$

$$\text{*2.05} [p := q \vee p, q := p \vee r, r := r \vee p]$$

$$\begin{aligned} &\vdash ((p \vee r) \rightarrow (r \vee p)) \\ &\rightarrow (((q \vee p) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{*1.4} [q := r] \quad \vdash (p \vee r) \rightarrow (r \vee p) \quad (5)$$

$$(4), (5), \text{*1.11} \quad \vdash ((q \vee p) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p)) \quad (6)$$

$$(3), (6), \text{*2.06} \quad \vdash ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p)) \quad (7)$$

$$\text{*1.6} \quad \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \quad (8)$$

$$(7), (8), \text{*2.05} \quad \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))$$

V důkazu dvojnásobným použitím *1.4 otočíme členy disjunkcí do řádku (7) a z výsledku a *1.6 přejdeme pomocí principu sylogismu k dokazované implikaci. Princip sylogismu, tj. *2.05 a *2.06, má v tomto důkazu dvojí odlišné použití: jednou s jeho pomocí upravujeme za určité podmínky jeden člen implikace, ať už jde o disjunkci implikující (1), nebo implikovanou (4), a podruhé s jeho pomocí přecházíme v navazujících implikacích.

Toto tvrzení pak využijeme v důkazu

$$\text{*2.53} \quad \vdash (p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$$

Důkaz:

$$\text{*2.12} \quad \vdash p \rightarrow \sim \sim p \quad (1)$$

$$\text{*2.38} [p := q, q := p, r := \sim \sim p] \quad \vdash (p \rightarrow \sim \sim p) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (\sim \sim p \vee q)) \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{*1.11} \quad \vdash (p \vee q) \rightarrow (\sim \sim p \vee q) \quad (3)$$

$$(3), \text{*1.01} \quad \vdash (p \vee r) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$$

Mohli bychom mít dojem, že toto tvrzení je jen přímým důsledkem definice implikace, ale není to tak. K jeho důkazu potřebujeme *2.12 a pak právě vhodně zvolenou instanci *2.38.

Z tvrzení elementárních výrokových funkcí složených z negace, disjunkce a implikace uvedeme ještě zbývající podoby principu transpozice

$$*2.15 \quad \vdash (\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$$

$$*2.16 \quad \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

$$*2.17 \quad \vdash (\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

ale pro stručnost už bez důkazů.

Podívejme se ještě na několik důkazů, v nichž používáme konjunkci:

$$*3.1 \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

Důkaz:

$$*2.08 [p := \sim(\sim p \vee \sim q)] \quad \vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \quad (1)$$

$$(1), *3.01 \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

Takovýto důkaz budeme zkráceně zapisovat

$$*2.08 [p := \sim(\sim p \vee \sim q)], *3.01 \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

a tomuto řádku rozumíme jako zkratce za příslušné dosazení a náhradu jednoho nebo více výskytů konjunkce jejím rozepsáním, nebo naopak jejího rozepsání zkratkou.

Mohli bychom mít opět dojem, že tvrzení *3.1 je přímým důsledkem definice konjunkce, ale bez *2.08, nebo něčeho podobného, bychom se k implikaci nedostali.

$$*3.11 \quad \vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$$

Důkaz:

$$*2.08 [p := \sim(\sim p \vee \sim q)], *3.01 \quad \vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$$

Jde o opačnou implikaci k *3.1 a důkaz je podobný. Stejně by se daly dokázat všechny ostatní implikace mezi definujícími a definovanými elementárními výrokovými funkcemi z našich dosavadních definic, tj. z §42.

Následující tvrzení je pomocné pro důkaz tvrzení *3.2:

$$\text{*3.12} \quad \vdash \sim p \vee (\sim q \vee (p \wedge q))$$

Důkaz:

$$\text{*2.11 } [p := \sim p \vee \sim q], \text{*3.01} \quad \vdash (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{*2.32 } [p := \sim p, q := \sim q, r := p \wedge q] \quad & \vdash ((\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q)) \\ & \rightarrow (\sim p \vee (\sim q \vee (p \wedge q))) \end{aligned} \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{*1.11} \quad \vdash \sim p \vee (\sim q \vee (p \wedge q))$$

Pro vymyšlení tohoto důkazu by asi bylo důležité rozpoznat, že jde o instanci elementární výrokové funkce tvrzené v *2.11 s přesunutými závorkami.

K dalším dvěma tvrzením dojdeme z *3.1 a *3.11 pomocí principu transpozice:

$$\text{*3.13} \quad \vdash \sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

Důkaz:

$$\text{*3.11} \quad \vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{*2.15 } [p := \sim p \vee \sim q, q := p \wedge q] \quad & \vdash (\sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)) \\ & \rightarrow (\sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)) \end{aligned} \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{*1.11} \quad \vdash \sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

Takovýto důkaz budeme zkráceně zapisovat

$$\text{*3.11} \quad \vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q) \quad (1)$$

$$(1), \text{*2.15} \quad \vdash \sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

kde druhý řádek je zkratkou za vhodné dosazení do *2.15 a inferenci využívající výsledek tohoto dosazení a (1) jako předpoklady.

$$\text{*3.14} \quad \vdash (\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge q)$$

Důkaz:

$$\text{*3.1} \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \quad (1)$$

$$(1), \text{*2.03} \quad \vdash (\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge q)$$

Následující tvrzení je už jen výsledkem zkrácení *3.12:

$$\text{*3.2} \quad \vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$$

Důkaz:

$$\text{*3.12, *1.01} \quad \vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$$

přičemž zopakujeme, že takto zapsaný důkaz je zkrácením zmíněných dvou kroků: tvrzení *3.12 a jeho úpravy podle definice *1.01.

Ukážeme několik tvrzení s konjunkcí, která jsou obdobami tvrzení s disjunkcí, která už máme:

$$\text{*3.22} \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$$

Důkaz:

$$\text{*3.13 } [p := q, q := p] \quad \vdash \sim(q \wedge p) \rightarrow (\sim q \vee \sim p) \quad (1)$$

$$\text{*1.4 } [p := \sim q, q := \sim p] \quad \vdash \dots \rightarrow (\sim p \vee \sim q) \quad (2)$$

$$\text{*3.14} \quad \vdash \dots \rightarrow \sim(p \wedge q) \quad (3)$$

$$(3), \text{*2.17} \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$$

Důkaz je tu vedený postupnými úpravami od negace zadního členu k negaci předního členu a závěrečnou transpozicí. Mohli bychom to zkusit rovnou od předního členu, tj. od $p \wedge q$, a první krok bychom mohli udělat k $\sim(\sim p \vee \sim q)$ podle *3.1, ale pak bychom stejně potřebovali transpozici, abychom se zbavili negace pro použití *1.4. Alternativně bychom mohli dokazovat takto:

$$\text{*1.4 } [p := \sim q, q := \sim p] \quad \vdash (\sim q \vee \sim p) \rightarrow (\sim p \vee \sim q) \quad (1)$$

$$(1), \text{*2.16} \quad \vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(\sim q \vee \sim p) \quad (2)$$

$$(3), \text{*3.01} \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$$

Další tvrzení je

$$\text{*3.24} \quad \vdash \sim(p \wedge \sim p)$$

Důkaz:

$$\text{*2.11 } [p := \sim p] \quad \vdash \sim p \vee \sim \sim p \quad (1)$$

$$\text{*3.14 } [q := \sim p] \quad \vdash (\sim p \vee \sim \sim p) \rightarrow \sim(p \wedge \sim p) \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{*1.11} \quad \vdash \sim(p \wedge \sim p)$$

což je tzv. zákon sporu. Důkaz tohoto tvrzení očekávatelně vychází ze zákona vyloučeného třetího; ukazuje přechod od jednoho ke druhému, což ale neznamená, že by jeden z nich byl podstatně původnější.

Následující tvrzení jsou použitelnějšími podobami *2.02:

$$\text{*3.26} \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow p$$

Důkaz:

$$\text{*2.02 } [p := q, q := p], \text{*1.01} \quad \vdash \sim p \vee (\sim q \vee p) \quad (1)$$

$$\text{*2.31 } [p := \sim p, q := \sim q, r := p] \quad \vdash (\sim p \vee (\sim q \vee p)) \rightarrow ((\sim p \vee \sim q) \vee p) \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{*1.11} \quad \vdash (\sim p \vee \sim q) \vee p \quad (3)$$

$$\text{*2.53 } [p := \sim p \vee \sim q, q := p] \quad \vdash ((\sim p \vee \sim q) \vee p) \rightarrow (\sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow p) \quad (4)$$

$$(3), (4), \text{*1.11} \quad \vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow p \quad (5)$$

$$(5), \text{*3.01} \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow p$$

$$\text{*3.27} \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow q$$

Důkaz:

$$\text{*3.22} \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p) \quad (1)$$

$$\text{*3.26 } [p := q, q := p] \quad \vdash \dots \rightarrow q$$

V důkazu *3.26 jde kromě využití *2.02 jen o přesuny závorek a přechody podle definic implikace a konjunkce. Druhý důkaz je jen spojením tvrzení instance předchozí výrokové funkce a *1.4.

O trochu komplikovanější důkazy jsou

$$\text{*3.3} \quad \vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

Důkaz:

$$\text{*2.08 } [p := (p \wedge q) \rightarrow r], \text{*3.01} \quad \vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow r) \quad (1)$$

$$\text{*2.15 } [p := \sim p \vee \sim q, q := r] \quad \vdash \dots \rightarrow (\sim r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)) \quad (2)$$

$$\text{*2.08 } [p := \sim r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)], \text{*1.01} \quad \vdash \dots \rightarrow (\sim r \rightarrow (p \rightarrow \sim q)) \quad (3)$$

$$\text{*2.04 } [p := \sim r, q := p, r := \sim q] \quad \vdash \dots \rightarrow (p \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim q)) \quad (4)$$

$$\text{*2.17 } [p := r] \quad \vdash (\sim r \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow r) \quad (5)$$

$$\text{*2.05 } [q := \sim r \rightarrow \sim q, r := q \rightarrow r] \quad \vdash ((\sim r \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim q)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \quad (6)$$

$$(5), (6), \text{*1.11} \quad \vdash (p \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim q)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \quad (7)$$

$$(4), (7), \text{*2.06} \quad \vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

***3.31** $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

Důkaz:

*2.08 $[p := p \rightarrow (q \rightarrow r)]$, *1.01 $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (\sim p \vee (\sim q \vee r))$ (1)

*2.31 $[p := \sim p, q := \sim q]$ $\vdash \dots \rightarrow ((\sim p \vee \sim q) \vee r)$ (2)

*2.53 $[p := \sim p \vee \sim q, q := r]$ $\vdash \dots \rightarrow (\sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow r)$ (3)

*2.08 $[p := \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow r]$, *3.01 $\vdash \dots \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

Bez důkazů uvedeme několik dalších tvrzení:

***3.33** $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

***3.34** $\vdash ((q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

***3.35** $\vdash (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

***3.43** $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$

***3.45** $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$

***3.47** $\vdash ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s))$

***4.1** $\vdash (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

***4.11** $\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

***4.13** $\vdash p \leftrightarrow \sim \sim p$

***4.2** $\vdash p \leftrightarrow p$

***4.21** $\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

***4.22** $\vdash ((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

***4.24** $\vdash p \leftrightarrow (p \wedge p)$

***4.25** $\vdash p \leftrightarrow (p \vee p)$

***4.3** $\vdash (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

***4.31** $\vdash (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

***4.32** $\vdash ((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$

***4.33** $\vdash ((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

***4.4** $\vdash (p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

***4.41** $\vdash (p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

... atd.

§ 55

Podívejme se, jak by důkazy vypadaly, kdybychom pravidla *1.7, *1.71 a *1.72 nepoužívali tiše.⁶ Ukážeme to na prvním z nich:

***2.01** $\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$

Důkaz:

*1.2	$\vdash (p \vee p) \rightarrow p$	(1)
*1.7	Výraz $\sim p$ je elementární výroková funkce	(2)
(2), *1.72	Výraz $\sim p \vee \sim p$ je elementární výroková funkce	(3)
(3), *1.7	Výraz $\sim(\sim p \vee \sim p)$ je elementární výroková funkce	(4)
(2), (4), *1.72	Výraz $\sim(\sim p \vee \sim p) \vee \sim p$ je elementární výroková funkce	(5)
(5), *1.01	Výraz $(\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$ je elementární výroková funkce	(6)
(6), (1) $[p := \sim p]$	$\vdash (\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$	(7)
(7), *1.01	$\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$	

Řádkům (2) až (6) rozumíme takto: z výchozích kroků docházíme k tvrzením výroků o výrazech; nejprve tvrdíme, že výraz $\sim p$ je elementární výroková funkce, což je jenom jinak řečeno tvrzení *1.7, potom podle *1.72 tvrdíme, že ze dvou takovýchto výrazů složíme pomocí disjunkce elementární výrokovou funkci, v níž budou oba výskyty proměnné identifikované, atd.

Tento zápis důkazu ukazuje navíc oproti zkrácené verzi, že výraz, který tvrdíme v řádku (7), je také elementární výroková funkce. To je ve zkrácené verzi zahrnuté v kroku, kdy k jeho tvrzení přecházíme jako k tvrzení instance už dříve tvrzené elementární výrokové funkce.

§ 56

Přecházíme i k tvrzením výroků nezapsaných umělými výrazy. Ve sledovaném postupu najdeme jeden takový:

⁶ Takovýto důkaz ale v PM uvedený není.

***3.03** Konjunkce dvou elementárních výrokových funkcí obsahujících tytéž proměnné, jejichž (těch funkcí) jakékoli hodnoty jsou pravdivé, je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá

Důkaz:

- | | | |
|--|---|------|
| *1.7 | Negace té první je elementární výroková funkce | (1) |
| *1.7 | Negace té druhé je elementární výroková funkce | (2) |
| (1), (2), *1.72 | Disjunkce jejich negací je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech | (3) |
| (3), *1.7 | Její negace je elementární výroková funkce | (4) |
| (2), (4), *1.72 | Disjunkce negace té druhé a v předchozím řádku uvedené negace je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech | (5) |
| (1), (5), *1.72 | Disjunkce negace té první a v předchozím řádku uvedené disjunkce je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech | (6) |
| (6), *1.01, *3.01 | Implikace té první a implikace té druhé a jejich konjunkce je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v uvedených skládaných členech | (7) |
| *3.2 | $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ | (8) |
| (7), (8) [p := tu první, q := tu druhou] | Implikace té první a implikace té druhé a jejich konjunkce je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v uvedených skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá | (9) |
| (9), *1.11 | Implikace té druhé a jejich konjunkce je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v uvedených skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá | (10) |

- (10), *1.11 Jejich konjunkce je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá

Jak vidíme, důkaz vychází z pravidel *1.7, *1.72, *3.2 a z pravidla inference a definic implikace a konjunkce. Ukazuje, že z *3.2 přecházíme k tvrzení o pravdivosti hodnot elementární výrokové funkce, v níž jsou identifikované proměnné a z níž už dvěma inferencemi přejdeme k dokazovanému tvrzení.

Kdybychom používali *1.7, *1.71 a *1.72 tiše, a proměnné při dosazování tedy identifikovali také tiše, pravidlo *3.03 by toho moc neříkalo. Přechod z jakékoli instance *3.2 dvěma inferencemi ke konjunkci bychom dělali v důkazech i bez něj.

§57

Ještě si uvědomme, že příkladem elementárního výroku je i výraz

Je dobře, že Petr jde do školy

rozumíme-li mu tak, že neobsahuje žádné proměnné a je pravdivý nebo nepravdivý, a příkladem elementární výrokové funkce je potom i

Je dobře, že p

Tuto výrokovou funkci také skládáme do složitějších, spolu s negací a disjunkcí. Např. tedy složíme

$\sim$ Je dobře, že p

Je dobře, že $\sim p$

Je dobře, že $(p \vee \text{Petr nese knihu Michalovi})$

Je dobře, že $p \vee \sim \text{Je dobře, že } p$

Na rozdíl od elementárních výrokových funkcí negace a disjunkce, pravdivost jejichž hodnot závisí podle našich výchozích myšlenek jednoduše na pravdivosti hodnot jejich proměnných, necháváme ve sledovaném postupu vztah pravdivosti hodnot těchto a podobných elementárních výrokových

funkcí (říká se jim „intenzionální“) a pravdivosti hodnot jejich proměnných nerozhodnutý. Nemáme tu jejich výchozí myšlenky a neděláme s nimi žádné výchozí kroky, jinými slovy: nehrají tu žádnou roli.

Přesto je např. čtvrtá z nich instancí elementární výrokové funkce

$$p \vee \sim p$$

a jakákoli její hodnota je tedy tvrzena v *2.11. Dále je tím tedy tvrzena i jakákoli její instance, např.

Je dobře, že $(p \vee \text{Petr nese knihu Michalovi}) \vee \sim \text{Je dobře, že } (p \vee \text{Petr nese knihu Michalovi})$

... atd.

§58

Pokračovat budeme analýzou, v níž hrají roli i některé výroky a výrokové funkce, které nejsou elementární, a některé výrokové funkce některých výrokových funkcí.

Zopakujeme výchozí myšlenky, jak byly uvedeny v §25:

- a) rozšíření všech dosavadních výchozích myšlenek i na neelementární výroky a výrokové funkce: výrokem tedy rozumíme i výraz, který obsahuje vázané proměnné, je-li pravdivý nebo nepravdivý. Ostatní výchozí myšlenky, tj. myšlenky výrokové funkce, tvrzení výroku, tvrzení výrokové funkce, negace a disjunkce, rozšíříme tak, aby se týkaly i takovýchto výroků. Proměnné výrokové funkce budeme zapisovat řeckými písmeny φ , ψ , χ a budeme-li chtít zapsat, jaké proměnné výrokové funkce obsahuje, a nepůjde-li výslovně o proměnné výroky nebo také o proměnné výrokové funkce, zapíšeme je písmeny x , y , z , w
- b) myšlenka obecného kvantifikátoru: obecným kvantifikátorem rozumíme takovou výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, (1) jejíž hodnota je pravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu takovou výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, jejíž všechny hodnoty jsou pravdivé, a (2) jejíž hodnota je nepravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu takovou výrokovou funkci obsahující jednu pro-

měnnou, která má nějakou nepravdivou hodnotu. Obecný kvantifikátor výrokové funkce φ budeme zapisovat $\forall x \varphi x$, kde x je proměnná ve výrokové funkci φ vázaná kvantifikátorem

- c) myšlenka individua: individuem rozumíme takový výraz, který sám není ani výrokem, ani výrokovou funkcí

§ 59

Vrátíme-li se k příkladům elementárních výroků z § 37, budeme výrazům

Petr jde do školy
Petr nese knihu Michalovi
Petr jde do školy $\vee$ Petr nese knihu Michalovi
 $\sim$ Petr jde do školy

rozumět např. tak, že neobsahují žádné volné, ani vázané proměnné, ale obsahují individua „Petr“ a „Michal“. Jako elementární výroky jsou potom hodnotami elementárních výrokových funkcí

x jde do školy
 x nese knihu y
 x jde do školy $\vee x$ nese knihu y
 $\sim x$ jde do školy

v nichž proměnné x udělíme hodnotu „Petr“ a proměnné y hodnotu „Michal“.

Druhý a třetí z uvedených elementárních výroků jsou potom také hodnotami elementárních výrokových funkcí obsahujících jednu proměnnou a jedno konstantní individuum

x nese knihu Michalovi
 x jde do školy $\vee x$ nese knihu Michalovi

nebo

Petr nese knihu y
Petr jde do školy $\vee$ Petr nese knihu y

Příkladem neelementárních výroků jsou výrazy

$$\begin{aligned} \forall x \, x \text{ jde do školy} \\ \forall x \, x \text{ nese knihu Michalovi} \end{aligned}$$

z nichž ten první je hodnotou obecného kvantifikátoru, v němž proměnné udělíme jako hodnotu elementární výrokovou funkci „ x jde do školy“, a je pravdivý, jsou-li všechny hodnoty této výrokové funkce pravdivé, a je nepravdivý, je-li nějaká její hodnota nepravdivá. Druhý z těchto výrazů je hodnotou obecného kvantifikátoru, v němž proměnné udělíme jako hodnotu elementární výrokovou funkci „ x nese knihu Michalovi“, a je pravdivý, jsou-li všechny hodnoty této výrokové funkce pravdivé, a je nepravdivý, je-li nějaká její hodnota nepravdivá. Tyto výroky nejsou elementární, protože obsahují vázanou proměnnou x .

Druhý z těchto výrazů je potom také hodnotou výrokové funkce

$$\forall x \, x \text{ nese knihu } y$$

v níž proměnné y udělíme hodnotu „Michal“, protože udělíme-li proměnné v obecném kvantifikátoru jako hodnotu výrokovou funkci obsahující více proměnných, v tomto případě „ x nese knihu y “, bude se obecný kvantifikátor vázat nejvýše k jedné z nich, v tomto případě k x , a stane se výrokovou funkcí obsahující ty zbývající proměnné. Tato funkce není elementární, protože výrok, jímž se stane, není elementární.

Věty běžné řeči „Všichni jdou do školy“ a „Všichni jdou navštívit Michala“ se od uvedených výroků opět liší tím, že jejich smysl není tak jednoduchý.

§ 60

Na rozdíl od předchozího stupně analýzy, v němž jsme používali jenom proměnné elementární výroky, budeme teď používat i proměnné funkce. Zatímco např.

$$x \text{ jde do školy}$$

z předchozího příkladu je konstantní elementární výroková funkce obsahující proměnnou x ,

$$\varphi x$$

je proměnná elementární výroková funkce obsahující proměnnou x . Příslušně tomu, zatímco

Petr jde do školy

je konstantní elementární výrok,

$$\varphi \text{Petr}$$

je proměnný elementární výrok. Tento zápis se od zápisu p liší tím, že ukazuje individuum, které tento výrok obsahuje.

Jak jsme už viděli, výrazy zapsané pomocí proměnných bereme někdy jako výrokové funkce těchto proměnných a někdy jako jejich proměnné hodnoty. Např.

$$p \vee q$$

bereme někdy jako výrokovou funkci obsahující dvě proměnné a někdy jako výrok, který je hodnotou této funkce. Podobně budeme brát výraz

x jde do školy

někdy jako výrokovou funkci obsahující proměnnou x a někdy jako její proměnnou hodnotu, tj. výrok. To se ovšem vztahuje i na výrazy zapsané pomocí proměnných výrokových funkcí, např. tedy

$$\varphi x$$

budeme někdy brát jako výrokovou funkci obsahující proměnnou x , ale jindy jako výrok, který je její hodnotou.

§61

Budeme teď předvádět i myšlenky výrokových funkcí výrokových funkcí, tj. výrokových funkcí obsahujících proměnné výrokové funkce. Obecný kvantifikátor je takovou výrokovou funkcí:

$$\forall x \varphi x$$

je výroková funkce obsahující proměnnou φ . Tento výraz budeme brát i jako proměnnou hodnotu této výrokové funkce, tj. jako výrok. Samotný výraz

$$\varphi x$$

budeme potom ale brát nejenom jako výrokovou funkci obsahující proměnnou x , nebo jako výrok, ale i jako nejjednodušší výrokovou funkci obsahující kromě proměnné x i proměnnou výrokovou funkci φ , tedy jako výrokovou funkci obsahující dvě proměnné. Připouštíme i to, že bychom x vzali jako hodnotu, a φx bychom pak brali jako výrokovou funkci obsahující jen proměnnou φ .

§62

Výrokové funkce negace, disjunkce a obecného kvantifikátoru budeme spolu s dalšími výrokovými funkcemi skládat do složitějších, např. do funkcí

$$\begin{aligned} &\sim \forall x \varphi x \\ &\forall x \sim \varphi x \\ &\sim \varphi y \vee \forall x \varphi x \\ &\forall x (\varphi x \vee \psi x) \\ &\forall x (\varphi x \vee p) \\ &\forall x \sim \forall y \varphi xy \end{aligned}$$

kde k ukázání struktury složení opět užíváme závorky. Takto zapsaným výrazům rozumíme popořadě takto: První z nich je výrokovou funkcí obsahující volnou proměnnou φ , jejíž hodnota je pravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci, že výrok $\forall x \varphi x$ je nepravdivý, a jejíž

hodnota je nepravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci, že výrok $\forall x \varphi x$ je pravdivý. Druhá z nich je výrokovou funkcí obsahující volnou proměnnou φ , jejíž hodnota je pravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci, že všechny hodnoty její negace jsou pravdivé, a jejíž hodnota je nepravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci, že ne všechny hodnoty její negace jsou pravdivé. Třetí z nich je výrokovou funkcí obsahující volné proměnné φ a y , jejíž hodnota je pravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci a y takovou hodnotu, že aspoň jeden z výroků $\sim\varphi y$ a $\forall x \varphi x$ je pravdivý, a jejíž hodnota je nepravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci a y takovou hodnotu, že oba výroky $\sim\varphi y$ a $\forall x \varphi x$ jsou nepravdivé. Čtvrtá z nich je výrokovou funkcí obsahující volné proměnné φ a ψ , jejíž hodnota je pravdivá, udělíme-li φ a ψ jako hodnoty takové výrokové funkce, že všechny hodnoty jejich disjunkce jsou pravdivé, a jejíž hodnota je nepravdivá, udělíme-li φ a ψ jako hodnoty takové výrokové funkce, že ne všechny hodnoty jejich disjunkce jsou pravdivé. Pátá z nich je výrokovou funkcí obsahující volné proměnné φ a p , jejíž hodnota je pravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci a p jako hodnotu takový výrok, že všechny hodnoty jejich disjunkce jsou pravdivé, a jejíž hodnota je nepravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci a p jako hodnotu takový výrok, že ne všechny hodnoty jejich disjunkce jsou pravdivé. Šestá z nich je výrokovou funkcí obsahující volnou proměnnou φ , jejíž hodnota je pravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci, že všechny hodnoty výrokové funkce $\sim\forall y \varphi xy$ (tento výraz teď bereme jako obsahující jen x jako volnou proměnnou) jsou pravdivé, tj. že všechny hodnoty výrokové funkce $\forall y \varphi xy$ jsou nepravdivé, tj. že pro každou hodnotu proměnné x je nepravdivá nějaká hodnota výrokové funkce φxy , a jejíž hodnota je nepravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci, že ne všechny hodnoty výrokové funkce $\sim\forall y \varphi xy$ jsou pravdivé, tj. že ne všechny hodnoty výrokové funkce $\forall y \varphi xy$ jsou nepravdivé, tj. že pro některou hodnotu proměnné x jsou pravdivé všechny hodnoty výrokové funkce φxy .

Závorek opět může být i víc, jako např. ve výrokových funkcích

$$\begin{aligned} &\forall x (\varphi x \vee \psi x) \vee \sim\forall x (\varphi x \vee \sim\psi x) \\ &\sim(\forall x (\varphi x \vee \psi x) \vee \sim\forall x \varphi x) \end{aligned}$$

... atd.

§ 63

Tomu, že je výraz instancí výrokové funkce, rozumíme stejně jako dříve. Dosazovat ale budeme za jakékoli volné proměnné. Např. ve funkci $\forall x \sim \varphi x$ dosadíme za proměnnou φ výrokovou funkci $\psi xy \vee \varphi x$ a dostaneme

$$\forall x \sim (\psi xy \vee \varphi x)$$

což zapíšeme

$$\forall x \sim \varphi x [\varphi x := \psi xy \vee \varphi x]$$

Podobně, když dosadíme

$$\sim \varphi y \vee \forall x \varphi x [\varphi x := \psi xy \vee \varphi x]$$

dostaneme

$$\sim (\psi yy \vee \varphi y) \vee \forall x (\psi xy \vee \varphi x)$$

(Všimněme si, že v přední části disjunkce obsahovala výroková funkce φ proměnnou y , a proto tam je po dosazení y i na místě první proměnné obsažené v dosazované výrokové funkci.) Mohli jsme ovšem dosadit i

$$\sim \varphi y \vee \forall x \varphi x [\varphi x := \psi zx \vee \varphi z]$$

a výsledek by byl

$$\sim (\psi zy \vee \varphi z) \vee \forall x (\psi zx \vee \varphi z)$$

Protože v zápise není nijak řečeno, zda je proměnná obsažená ve výrokové funkci φ proměnným individuem, výrokem nebo výrokovou funkcí, připouštíme i dosazení

$$\sim \varphi y \vee \forall x \varphi x [y := p]$$

jímž dostaneme

$$\sim \varphi p \vee \forall x \varphi x$$

kde φ je výroková funkce výroků, nebo dosazení

$$\sim \varphi y \vee \forall x \varphi x \ [\varphi x := \psi x, y := \chi]$$

jímž dostaneme

$$\sim \psi \chi \vee \forall x \psi x$$

kde ψ je tedy výroková funkce výrokových funkcí.

Jako instance výrokových funkcí budeme opět brát i výroky, které jsou jejich hodnotami.

§ 64

Tvrzení výrokové funkce je opět i tvrzením jakékoli její instance.

§ 65

Zavedeme zkratku za výrokovou funkci výrokových funkcí složenou z negace a obecného kvantifikátoru:

***10.01**⁷ $\exists x \varphi x$ je zkratka za $\sim \forall x \sim \varphi x$

Je to existenční kvantifikátor. Je to tedy taková výroková funkce obsahující jednu proměnnou, jejíž hodnota je pravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci, že výrok $\forall x \sim \varphi x$ je nepravdivý, tj. některá hodnota výrokové funkce φx je pravdivá, a jejíž hodnota je nepravdivá, udělíme-li φ jako hodnotu takovou výrokovou funkci, že výrok $\forall x \sim \varphi x$ je pravdivý, tj. všechny hodnoty výrokové funkce φx jsou nepravdivé.

⁷ Číslování začínající *9 a *10 se míchá, protože v něčem využíváme pojetí předvedené v kapitole *9 a v něčem pojetí předvedené v kapitole *10.

Zápisy pomocí této zkratky budeme opět nahrazovat původními výrazy a naopak. Např. výrokové funkce

$$\begin{aligned} & \exists x \sim \varphi x \\ & \sim \exists x \varphi x \\ & \sim \exists x \sim \varphi x \\ & \forall x \exists y \psi xy \\ & \forall x (\exists y \psi xy \vee \sim \exists y \psi xy) \end{aligned}$$

můžeme popořadě nahradit výrazy

$$\begin{aligned} & \sim \forall x \sim \sim \varphi x \\ & \sim \sim \forall x \sim \varphi x \\ & \sim \sim \forall x \sim \sim \varphi x \\ & \forall x \sim \forall y \sim \psi xy \\ & \forall x (\sim \forall y \sim \psi xy \vee \sim \sim \forall y \sim \psi xy) \end{aligned}$$

a naopak.

§ 66

Dále rozšíříme definice implikace, konjunkce a ekvivalence i na neelementární výroky. Takto definované výrokové funkce budeme skládat s negací, disjunkcí a oběma kvantifikátory spolu s ostatními výrokovými funkcemi.

§ 67

Výchozím krokem teď bude i zavedení zkratky za výraz o smyslu dvou výrazů:

***9.131⁸** To, že dva výrazy jsou stejného typu, je zkratka za to, že jsou oba individua, že jsou oba elementární výroky obsahující jedno individuum, že jsou oba elementární výrokové funkce jednoho

⁸ Tato definice je PM uvedena trochu jinak. Zachováváme její původní číslo, přestože ji upravujeme tak, abychom se vyhnuli diskusím s ní spojeným (viz např. Kamareddine,

individua, že jsou oba elementární výroky obsahující dvě individua, že jsou oba elementární výrokové funkce jednoho individua obsahující ještě jedno konstantní individuum, že jsou oba elementární výrokové funkce dvou individuí... atd., tj. že jsou oba elementární výroky nebo elementární výrokové funkce a obsahují stejné počty výrazů stejných typů; a pokud to jsou neelementární výroky nebo neelementární výrokové funkce, že jsou oba navíc neelementární ve stejném smyslu, tj. že jsou oba výroky obsahující jedno vázané proměnné individuum, že jsou oba výrokové funkce obsahující jedno vázané proměnné a jedno volné proměnné individuum... atd., že jsou oba výroky obsahující jednu vázanou proměnnou stejného typu... atd.

Zavedení této zkratky za výrazy o složitějších výrazech už předpokládá její používání za jednodušší výrazy (takovýmto definicím obvykle říkáme „induktivní“). V každém jednotlivém případě bychom je ale mohli po nějakém počtu kroků nahradit původními výrazy bez této zkratky.

Při používání této zkratky se budeme opírat o to, že při skládání výroků a výrokových funkcí pomocí negace a disjunkce žádné proměnné ani konstanty nepřidáváme, tj. o myšlenku, která stála za výchozími tvrzeními *1.7 a *1.71 z předchozího stupně analýzy. Při každém složení s obecným kvantifikátorem naopak jedna vázaná proměnná přibude, a tím se složený výraz vzdálí elementárním výrazům.

Stejného typu jsou např. výrazy

Petr
Michal

bereme-li je jako individua. Stejného typu jsou pak po dvojicích výrazy

Petr jde do školy
Michal jde do školy
~ Petr jde do školy
Petr nese knihu Petrovi
Petr jde do školy v ~ Petr jde do školy

F., Laan, T., Nederpelt, R., „Types in Logic and Mathematics before 1940“, *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 8/2, 2002, s. 214) a rozdílu mezi pojetím v kapitolách *9 a *10.

bereme-li je jako elementární výroky obsahující jedno individuum. A bereme-li výrazy

$$\begin{aligned} & x \text{ jde do školy} \\ & \sim x \text{ jde do školy} \\ & x \text{ nese knihu } x \\ & x \text{ jde do školy} \vee \sim x \text{ jde do školy} \end{aligned}$$

jako elementární výrokové funkce jednoho individua, jsou jiného, ale mezi sebou po dvojicích zase stejného typu. Kdybychom ale tyto výrazy brali jako hodnoty příslušných elementárních výrokových funkcí, tj. jako elementární výroky, byly by stejného typu jako výrazy z předchozího výčtu. Podobně je to s elementárními výroky

$$\begin{aligned} & \text{Petr nese knihu Michalovi} \\ & \sim \text{Petr nese knihu Michalovi} \\ & \text{Petr jde do školy} \vee \text{Michal jde do školy} \end{aligned}$$

a elementárními výrokovými funkcemi jednoho individua, jichž jsou to hodnoty, tj.

$$\begin{aligned} & x \text{ nese knihu Michalovi} \\ & \text{Petr nese knihu } y \\ & \sim \text{Petr nese knihu } y \\ & \sim x \text{ nese knihu Michalovi} \\ & \text{Petr jde do školy} \vee y \text{ jde do školy} \\ & x \text{ jde do školy} \vee \text{Michal jde do školy} \end{aligned}$$

a elementárními výrokovými funkcemi dvou individuí, jichž jsou to hodnoty, tj.

$$\begin{aligned} & x \text{ nese knihu } y \\ & \sim x \text{ nese knihu } y \\ & x \text{ jde do školy} \vee y \text{ jde do školy} \end{aligned}$$

...atd.

Jako příklady neelementárních výroků stejného typu vezměme

$$\begin{aligned} &\forall x \, x \text{ jde do školy} \\ &\sim \forall x \, x \text{ jde do školy} \\ &\forall x \, (x \text{ jde do školy} \vee \sim x \text{ nese knihu } x) \end{aligned}$$

protože všechny obsahují jednu vázanou proměnnou v elementární výrokové funkci jednoho individua. Stejného typu jsou dále výrazy

$$\begin{aligned} &\forall x \, x \text{ nese knihu Michalovi} \\ &\forall y \, \sim \text{Petr nese knihu } y \\ &\text{Petr jde do školy} \vee \forall y \, y \text{ jde do školy} \end{aligned}$$

bereme-li je jako výroky obsahující jedno individuum a jednu vázanou proměnnou v elementární výrokové funkci dvou individuí (a to i v třetím případě, kde by tou výrokovou funkcí bylo „ x jde do školy $\vee y$ jde do školy“). Jiného, ale mezi sebou stejného typu jsou pak výrokové funkce jednoho individua, jichž jsou to hodnoty, tj.

$$\begin{aligned} &\forall x \, x \text{ nese knihu } z \\ &\forall y \, \sim z \text{ nese knihu } y \\ &z \text{ jde do školy} \vee \forall y \, y \text{ jde do školy} \end{aligned}$$

tyto výrazy bychom ale mohli opět brát i jako výroky, a pak by byly stejného typu jako výrazy z předchozího výčtu. Jsou-li φ a ψ výrokové funkce stejného typu, pak jsou stejného typu i výrazy

$$\begin{aligned} &\forall x \, \varphi x \\ &\sim \forall x \, \psi x \\ &\forall x \, (\varphi x \vee \psi x) \end{aligned}$$

bereme-li je jako výroky, tj. jako hodnoty výrokových funkcí výrokových funkcí; kdybychom je brali jako výrokové funkce, byly by stejného typu jen první dva z nich, protože obsahují jednu proměnnou a ten třetí obsahuje dvě proměnné. Přitom φ a ψ nemusí být jenom elementární výrokové funkce individuí, jako např.

x jde do školy
 x jde do školy $\vee$ $\sim$ x nese knihu x

ale mohou to být třeba i výrokové funkce

$$\begin{aligned} &\forall x (\sim \chi x \vee \chi \text{Petr}) \\ &\sim \forall x (\sim \chi x \vee \sim \chi \text{Petr}) \end{aligned}$$

které jsou stejného typu, jsou-li už výrazy $\sim \chi x \vee \chi \text{Petr}$ a $\sim \chi x \vee \sim \chi \text{Petr}$ stejného typu... atd. Nebo to ani nemusejí být výrokové funkce individuí.

... atd.

§ 68

Budeme opět tvrdit výrokové funkce výroků, jejichž podobu omezenou na elementární výroky jsme tvrdili v *1.2 až *1.6. I v tomto stupni analýzy to budou výchozí kroky; teď ale budeme za jejich instance brát jakékoli i neelementární výrokové funkce, jejichž hodnoty budou hodnotami těchto výrokových funkcí. Např. tedy

$$(\varphi x \vee \varphi x) \rightarrow \varphi x$$

je instancí výrokové funkce tvrzené v *1.2, i když φ není elementární výroková funkce.

§ 69

Jako výchozí kroky přidáme dvě nová tvrzení výrokových funkcí:

$$\text{*10.1} \quad \vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$$

$$\text{*10.12} \quad \vdash \forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$$

Snadno si můžeme rozmyslet, že jakékoli hodnoty těchto výrokových funkcí, tj. jakékoli výroky, jimiž se tyto výrokové funkce stanou po udělení hodnot proměnným φ a y , resp. p a φ , jsou pravdivé: *10.1 je tvrzení výro-

kové funkce, jejíž hodnota je pravdivá, je-li pravdivý aspoň jeden z výroků $\sim \forall x \varphi x$ a φy , přičemž ale výrok φy buď už sám pravdivý je, nebo je tou hodnotou výrokové funkce φx , která je nepravdivá. Zápisu výrokové funkce tvrzené v *10.12 rozumíme tak, že p je proměnný výrok, ale při přechodu k jejím instancím budeme dávat pozor, abychom za p nedosadili výrokovou funkci, která by obsahovala proměnnou vázanou uvedeným kvantifikátorem, výsledná výroková funkce by totiž nebyla instancí tvrzené výrokové funkce. *10.12 je pak tvrzení výrokové funkce, jejíž hodnota je pravdivá, je-li pravdivý aspoň jeden z výroků $\sim \forall x (p \vee \varphi x)$ a $p \vee \forall x \varphi x$, přičemž ale výrok $p \vee \forall x \varphi x$ buď už sám pravdivý je, nebo jsou nepravdivé oba výroky p a $\forall x \varphi x$, v tom případě ale některá hodnota výrokové funkce φx je nepravdivá, a tedy i některá hodnota výrokové funkce $p \vee \varphi x$ je nepravdivá.

Tato tvrzení budeme používat především takto: první z nich bude sloužit spolu s pravidlem inference k odstranění kvantifikátoru; druhé z nich k přechodu kvantifikátoru dovnitř disjunkce nebo implikace. Obě tvrzení budeme opět používat jako pravidla, když budeme přecházet k jejich instancím, nebo jako předpoklady, když z nich budeme inferencí přecházet k zadním členům jejich instancí.

§ 70

Jako výchozí krok budeme tvrdit i pravidlo inference, pochopitelně také rozšířené na neelementární výrokové funkce a neelementární výroky:

***9.12** Cokoli implikovaného pravdivým předpokladem je pravdivé

Tomuto pravidlu rozumíme jako nepodmíněnému tvrzení jakéhokoli výroku nebo výrokové funkce, které jsou instancí zadního členu takové tvrzené implikace, jejíž přední člen také tvrdíme. Rozlišení formulace tohoto pravidla pro výroky a výrokové funkce už pro stručnost neděláme.

§ 71

Přidáme ale jedno další výchozí tvrzení pravidla, a to pravidla generalizace:

- *9.13** Je pravdivá hodnota obecného kvantifikátoru výrokové funkce, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá

Můžeme si rozmyslet, že je to pravdivý výrok: tomu, že je jakákoli hodnota výrokové funkce pravdivá, rozumíme tak, že jsou pravdivé všechny. Přitom ale tiše děláme krok, jemuž bude ještě potřeba věnovat pozornost, když předpokládáme, že o všech jejích hodnotách (neboli o „totalitě“ jejích hodnot, jak budeme říkat) má smysl mluvit; právě toho se týká rozlišování typů výrazů.

Pravidlu generalizace budeme opět rozumět jako nepodmíněnému a budeme jej používat pro přechody od tvrzení výrokových funkcí k tvrzením jejich obecného kvantifikátoru, tedy k přidávání obecného kvantifikátoru.

§ 72

Jako výchozí krok budeme tvrdit pravidlo stejnosti typu, týkající se smyslu výrazů:

- *9.14** Je-li výraz obsahující proměnnou smysluplný, je smysluplný s konstantou na jejím místě právě tehdy, je-li tato konstanta stejného typu jako tato proměnná

Také o tomto pravidle si můžeme rozmyslet, že je to pravdivý výrok, i když bychom mohli mít dojem, že je to spíše vyhlášení omezení, které výrazy budeme brát jako smysluplné. Je-li ale výraz obsahující proměnnou nějak smysluplný, je potom smysluplný i s konstantou stejného typu na místě té proměnné, a výraz, který by byl jinak stejný a na jejím místě by obsahoval konstantu jiného typu, by smysluplný nebyl.

Např. výraz

x jde do školy

v uvedených příkladech je smysluplný jako výroková funkce obsahující proměnné individuum. Kdyby na místě proměnné obsahoval konstantu „Petr“, která je stejného typu, byl by také smysluplný. Kdyby tam ale obsahoval konstantu jiného typu, třeba výrokovou funkci „x nese knihu y“, byl by nesmyslný:

„ x nese knihu y “ jde do školy

je nesmysl, protože „ x jde do školy“ není výroková funkce výrokových funkcí. Podobně např. výraz

$$\psi x$$

je smysluplný třeba jako výroková funkce elementární výrokové funkce jednoho individua. Kdyby potom na místě proměnné x obsahoval konstantní výrokovou funkci „ x jde do školy“, která je stejného typu, byl by také smysluplný. Kdyby tam ale obsahoval konstantu jiného typu, třeba konstantní individuum, byl by nesmyslný:

$$\psi \text{Petr}$$

by potom byl nesmysl, protože ψ není výroková funkce individuí. Kdyby na místě proměnné obsahoval konstantní výrokovou funkci jednoho individua, která by ale byla jiného typu, např.

$$\forall x \, x \text{ nese knihu } y$$

byl by to výraz

$$\psi \forall x \, x \text{ nese knihu } y$$

který by byl také nesmyslný, protože ψ není výroková funkce neelementárních výrokových funkcí.

Toto pravidlo budeme používat tam, kde budeme chtít rozlišit, čeho něco je výroková funkce, a čeho to výroková funkce není.

§ 73

Posledním výchozím krokem bude tvrzení pravidla nahrazování konstant a proměnných:

***9.15** Výraz obsahující nějakou konstantu je výrok právě tehdy, když je to s proměnnou na jejím místě výroková funkce

I toto pravidlo je pravdivý výrok: k jakémukoli výroku obsahujícímu konstantu je výroková funkce s proměnnou na jejím místě, a naopak.

Např. k výroku

Petr jde do školy

je výroková funkce

x jde do školy

a naopak. Podobně k výroku

ψ x jde do školy

z předchozího příkladu, je výroková funkce

ψx

a naopak.

Toto pravidlo budeme používat k tvrzení toho, co je také výrok nebo výroková funkce, je-li už nějaký jiný výraz výrok nebo výroková funkce.

§74

Stejně jako v předchozím stupni analýzy budeme pravidla *9.14 a *9.15 zprvu, tj. v §76, používat tiše. Tvrzení výroků o tom, jaké výrazy jsou výroky a výrokové funkce, a případně, čeho to jsou výrokové funkce, budeme výslovně uvádět v důkazech až dále.

§75

Opět si uvědomme, že výchozí kroky nebyly voleny podle toho, že by byly samozřejmé, nebo podle toho, že by nějak podstatně předcházely ostatním. Jiné pravdivé výroky, z jejichž tvrzení bychom také došli přehledně k tomu, k čemu chceme, by byly právě tak dobré.

§ 76

K dalším krokům tohoto stupně analýzy přecházíme z výchozích kroků. Ukážeme opět některé přechody k dalším tvrzením výrokových funkcí zapisaných umělými výrazy:

***10.14** $\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$

Důkaz:

*10.1 $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ (1)

*10.1 $[\varphi x := \psi x]$ $\vdash \forall x \psi x \rightarrow \psi y$ (2)

(1), (2), *3.2 $\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)$ (3)

(3), *3.47 $\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$

Ze dvou instancí tvrzení *10.1 jsme tedy podle dvou pravidel, v nichž hrají roli jenom výrokové funkce výroků, přešli k dalšímu tvrzení, v němž hrají roli i výrokové funkce výrokových funkcí. (K tomuto důkazu a v němž zamlčenému předpokladu se ještě vrátíme v § 78.) Tímto způsobem přebíráme dříve uvedené důkazy a navazujeme na ně, jen v rozšíření i na neelementární výroky a výrokové funkce.

V tomto důkazu jsou použité zkratky, které jsme postupně zavedli při zapisování důkazů v § 54. Nezkrácený by vypadal takto:

Důkaz:

*10.1 $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ (1)

*10.1 $[\varphi x := \psi x]$ $\vdash \forall x \psi x \rightarrow \psi y$ (2)

*3.2 $[p := \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y, q := \forall x \psi x \rightarrow \psi y]$
 $\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((\forall x \psi x \rightarrow \psi y)$
 $\rightarrow ((\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)))$ (3)

(1), (3), *9.12 $\vdash (\forall x \psi x \rightarrow \psi y) \rightarrow$
 $((\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y))$ (4)

(2), (4), *9.12 $\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)$ (5)

*3.47 $[p := \forall x \varphi x, q := \forall x \psi x, r := \varphi y, s := \psi y]$
 $\vdash ((\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y))$
 $\rightarrow ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y))$ (6)

(5), (6), *9.12 $\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$

Dále budeme uvádět jenom zkrácené verze důkazů a nacházení vhodných dosazení v tvrzeních instancí budeme nechávat na čtenáři.

Následující tvrzení ukazuje vztah obecného kvantifikátoru a disjunkce tím, že doplní opačnou implikaci k tvrzení *10.12:

$$\text{*10.2} \quad \vdash \forall x (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$$

Důkaz:

*10.1	$\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$	(1)
(1), *1.6	$\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y)$	(2)
(2), *9.13	$\vdash \forall y ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$	(3)
(3), *1.01	$\vdash \forall y (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee (p \vee \varphi y))$	(4)
(4), *10.12	$\vdash \sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee \forall y (p \vee \varphi y)$	(5)
(5), *1.01	$\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)$	(6)
*10.12	$\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	(7)
(6), (7), *3.2	$\vdash ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)) \wedge (\forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x))$	
	$\rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	(8)
(8), *4.01	$\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	

Všimněme si, že proměnná y je v důkazu pomocná, v samotné tvrzené výrokové funkci obsažená není; je zvolená tak, aby se lišila od x , od φ i od p , a nikde se tedy nespletla s proměnnou vázanou kvantifikátorem. Kdybychom místo tvrzené výrokové funkce dokazovali nějakou její instanci, která by y obsahovala, např. $\forall x (p \vee \varphi xy) \leftrightarrow (p \vee \forall x \varphi xy)$, použili bychom v důkazu jednoduše jinou pomocnou proměnnou. Na osmém řádku ji můžeme beze změny významu nahradit proměnnou x , protože rozlišení vázaných proměnných mimo dosah kvantifikátoru nehraje roli.

Ve čtvrtém řádku jsme rozepsali implikaci podle její definice a po úpravě pomocí *10.12 na pátém řádku jsme zápis pomocí zkratky zase vrátili na šestém řádku zpátky. Tyto kroky budeme zkráceně zapisovat

$$(3), 10.12, *1.01 \quad \vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y) \quad (4)$$

Závěrečné dva řádky, tj. přechod pomocí *3.2 a zkrácení konjunkce dvou opačných implikací jako ekvivalence, budeme zkráceně zapisovat

$$(6), (7), *3.2, *4.01 \quad \vdash \forall x (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$$

Celý důkaz tedy zapíšeme zkráceně

*10.1	$\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$	(1)
(1), *1.6	$\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y)$	(2)
(2), *9.13	$\vdash \forall y ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$	(3)
(3), 10.12, *1.01	$\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)$	(4)
*10.12	$\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	(5)
(4), (5), *3.2, *4.01	$\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	

kde čtvrtému a šestému řádku rozumíme výše uvedeným způsobem.

Tím je zároveň ukázaný i vztah obecného kvantifikátoru a implikace:

$$\text{*10.21} \quad \vdash \forall x (p \rightarrow \varphi x) \leftrightarrow (p \rightarrow \forall x \varphi x)$$

Důkaz:

*10.2	$\vdash \forall x (\sim p \vee \varphi x) \leftrightarrow (\sim p \vee \forall x \varphi x)$	(1)
(1), *1.01	$\vdash \forall x (p \rightarrow \varphi x) \leftrightarrow (p \rightarrow \forall x \varphi x)$	

Zatímco do disjunkce nebo implikace tedy vstupuje obecný kvantifikátor při zachování ekvivalence jen k některým zvláštním členům, do konjunkce vstupuje snadněji:

$$\text{*10.22} \quad \vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \leftrightarrow (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x)$$

Důkaz:

*10.1	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$	(1)
*3.26	$\vdash \dots \rightarrow \varphi y$	(2)
(2), *9.13	$\vdash \forall y (\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \varphi y)$	(3)
*10.21	$\vdash \forall y (\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \varphi y) \leftrightarrow (\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \varphi y)$	(4)
(4), *4.01, *3.26	$\vdash \forall y (\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \varphi y) \rightarrow (\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \varphi y)$	(5)
(3), (5), *9.12	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \varphi y$	(6)
analogicky, s *3.27	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \psi y$	(7)
(6), (7), *3.43	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\forall y \varphi y \wedge \forall y \psi y)$	(8)
*10.14	$\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$	(9)
(9), *9.13	$\vdash \forall y ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y))$	(10)

$$\begin{array}{ll}
*10.21 & \vdash \forall y ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)) \\
& \leftrightarrow ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow \forall y (\varphi y \wedge \psi y)) \quad (11) \\
(11), *4.01, *3.26 & \vdash \forall y ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)) \\
& \rightarrow ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow \forall y (\varphi y \wedge \psi y)) \quad (12) \\
(10), (12), *9.12 & \vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow \forall y (\varphi y \wedge \psi y) \quad (13) \\
(8), (13), *3.2, *4.01 & \vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \leftrightarrow (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x)
\end{array}$$

Sedmému řádku tu rozumíme jako zopakování postupu na předchozích šesti řádcích s jedinou změnou, a to použitím *3.27 namísto prvního použití *3.26. K prvnímu směru dokazované implikace jsme došli z instance výrokové funkce tvrzené v *10.1 pomocí rozdělení implikované konjunkce, generalizací jejích částí a opětovaným spojením podle *3.43, tj. postupnými úpravami zadního členu výchozí instance, jejíž přední člen zůstal nedotčený; k druhému směru jsme došli už jen pomocí předchozích několika tvrzení.

Kroky v řádcích (3) až (6) budeme zkráceně zapisovat

$$(2), *9.13, *10.21 \quad \vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \varphi y \quad (3)$$

a celý důkaz tedy

$$\begin{array}{ll}
*10.1 & \vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y) \quad (1) \\
*3.26 & \vdash \dots \rightarrow \varphi y \quad (2) \\
(2), *9.13, *10.21 & \vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \varphi y \quad (3) \\
\text{analogicky, s } *3.27 & \vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \psi y \quad (4) \\
(3), (4), *3.43 & \vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\forall y \varphi y \wedge \forall y \psi y) \quad (5) \\
*10.14 & \vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y) \quad (6) \\
(6), *9.13, *10.21 & \vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow \forall y (\varphi y \wedge \psi y) \quad (7) \\
(5), (7), *3.2, *4.01 & \vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \leftrightarrow (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x)
\end{array}$$

Následujících několik tvrzení ukazuje vztah obecného kvantifikátoru a negace, tj. vztah obecného a existenčního kvantifikátoru:

$$*10.24 \quad \vdash \varphi y \rightarrow \exists x \varphi x$$

Důkaz:

$$\begin{array}{ll}
*10.1 & \vdash \forall x \sim \varphi x \rightarrow \sim \varphi y \quad (1) \\
(1), *2.03 & \vdash \varphi y \rightarrow \sim \forall x \sim \varphi x \quad (2) \\
(2), *10.01 & \vdash \varphi y \rightarrow \exists x \varphi x
\end{array}$$

Výroková funkce tvrzená v *10.24 je tedy jen transpozice instance výrokové funkce tvrzené v *10.1; složíme-li ji ještě jednou s *10.1, dostaneme:

$$\text{*10.25} \quad \vdash \forall x \varphi x \rightarrow \exists x \varphi x$$

Důkaz:

$$\text{*10.1} \quad \vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y \quad (1)$$

$$\text{*10.24} \quad \vdash \dots \rightarrow \exists x \varphi x$$

a další transpozicí přejdeme k

$$\text{*10.251} \quad \vdash \forall x \sim \varphi x \rightarrow \sim \forall x \varphi x$$

Důkaz:

$$\text{*10.25} \quad \vdash \forall x \varphi x \rightarrow \exists x \varphi x \quad (1)$$

$$(1), \text{*10.01} \quad \vdash \forall x \varphi x \rightarrow \sim \forall x \sim \varphi x \quad (2)$$

$$(2), \text{*2.03} \quad \vdash \forall x \sim \varphi x \rightarrow \sim \forall x \varphi x$$

O přechodu negace přes kvantifikátor bychom mohli mít dojem, že je přímým důsledkem definice existenčního kvantifikátoru, ale v důkazech se opíráme i o tvrzení *2.08 a princip dvojité negace, který navíc musíme dostat do ekvivalence:

$$\text{*10.252} \quad \vdash \sim \exists x \varphi x \leftrightarrow \forall x \sim \varphi x$$

Důkaz:

$$\text{*2.08, *10.01} \quad \vdash \sim \exists x \varphi x \rightarrow \sim \sim \forall x \sim \varphi x \quad (1)$$

$$\text{*2.14} \quad \vdash \dots \rightarrow \forall x \sim \varphi x \quad (2)$$

$$\text{*2.08, *10.01} \quad \vdash \exists x \varphi x \rightarrow \sim \forall x \sim \varphi x \quad (3)$$

$$(3), \text{*2.03} \quad \vdash \forall x \sim \varphi x \rightarrow \sim \exists x \varphi x \quad (4)$$

$$(2), (4), \text{*3.2, *4.01} \quad \vdash \sim \exists x \varphi x \rightarrow \forall x \sim \varphi x$$

nebo také:

$$\text{*4.13} \quad \vdash \forall x \sim \varphi x \leftrightarrow \sim \sim \forall x \sim \varphi x \quad (1)$$

$$(1), \text{*4.21} \quad \vdash \sim \sim \forall x \sim \varphi x \leftrightarrow \forall x \sim \varphi x \quad (2)$$

$$(2), \text{*10.01} \quad \vdash \sim \exists x \varphi x \leftrightarrow \forall x \sim \varphi x$$

kde druhému řádku rozumíme tak, že inferencí přecházíme i podle ekvivalence, což je zkrácený zápis za rozložení ekvivalence na konjunkci dvou implikací, výběr té vhodné a přechod podle ní.

***10.253** $\vdash \sim \forall x \varphi x \leftrightarrow \exists x \sim \varphi x$

Důkaz:

*10.1	$\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$	(1)
*2.12	$\vdash \dots \rightarrow \sim \sim \varphi y$	(2)
(2), *9.13, *10.21	$\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \forall y \sim \sim \varphi y$	(3)
(3), *2.16	$\vdash \sim \forall x \sim \sim \varphi x \rightarrow \sim \forall x \varphi x$	(4)
(4), *10.01	$\vdash \exists x \sim \varphi x \rightarrow \sim \forall x \varphi x$	(5)
*10.1	$\vdash \forall x \sim \sim \varphi x \rightarrow \sim \sim \varphi y$	(6)
analogicky, s *2.14	$\vdash \sim \forall x \varphi x \rightarrow \exists x \sim \varphi x$	(7)
(5), (7), *3.2, *4.01	$\vdash \sim \forall x \varphi x \leftrightarrow \exists x \sim \varphi x$	

Následující tvrzení předvádějí schémata tradičně pojednávána sylogistikou. Jde o přechody mezi několika výroky s obecným kvantifikátorem, existenčním kvantifikátorem a bez kvantifikátoru, v nichž postupujeme pomocí principu sylogismu:

***10.26** $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \varphi y) \rightarrow \psi y$

Důkaz:

*10.1	$\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\varphi y \rightarrow \psi y)$	(1)
(1), *3.31	$\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \varphi y) \rightarrow \psi y$	

Princip sylogismu (tj. tvrzení *2.05 nebo *2.06) je tu obsažený v důkazu tvrzení *3.31. Podobné je to i v dalších případech:

***10.27** $\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x \varphi x \rightarrow \forall x \psi x)$

Důkaz:

*10.14	$\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x \varphi x) \rightarrow ((\varphi y \rightarrow \psi y) \wedge \varphi y)$	(1)
*3.35	$\vdash \dots \rightarrow \psi y$	(2)
(2), *9.13, *10.21	$\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y \psi y$	(3)
(3), *3.3	$\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x \varphi x \rightarrow \forall x \psi x)$	

***10.271** $\vdash \forall x (\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x \varphi x \leftrightarrow \forall x \psi x)$

Důkaz:

- | | | |
|------------------------|--|-----|
| *2.08, *4.01 | $\vdash \forall x (\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow \forall x ((\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge (\psi x \rightarrow \varphi x))$ | (1) |
| *10.22 | $\vdash \dots \rightarrow (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \varphi x))$ | (2) |
| *3.26 | $\vdash \dots \rightarrow \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x)$ | (3) |
| *10.27 | $\vdash \dots \rightarrow (\forall x \varphi x \rightarrow \forall x \psi x)$ | (4) |
| analogicky, s *3.27 | $\vdash \forall x (\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x \psi x \rightarrow \forall x \varphi x)$ | (5) |
| (4), (5), *3.43, *4.01 | $\vdash \forall x (\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x \varphi x \leftrightarrow \forall x \psi x)$ | |

***10.28** $\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\exists x \varphi x \rightarrow \exists x \psi x)$

Důkaz:

- | | | |
|--------------------|--|-----|
| *10.1 | $\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\varphi y \rightarrow \psi y)$ | (1) |
| *2.16 | $\vdash \dots \rightarrow (\sim \psi y \rightarrow \sim \varphi y)$ | (2) |
| (2), *9.13, *10.21 | $\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow \forall y (\sim \psi y \rightarrow \sim \varphi y)$ | (3) |
| *10.27 | $\vdash \dots \rightarrow (\forall x \sim \psi x \rightarrow \forall x \sim \varphi x)$ | (4) |
| *2.16, *10.01 | $\vdash \dots \rightarrow (\exists x \varphi x \rightarrow \exists x \psi x)$ | |

***10.3** $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x (\varphi x \rightarrow \chi x)$

Důkaz:

- | | | |
|-------------------|---|-----|
| *10.22 | $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x))$ | |
| | $\leftrightarrow \forall x ((\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge (\psi x \rightarrow \chi x))$ | (1) |
| (1), *4.01, *3.26 | $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x))$ | |
| | $\rightarrow \forall x ((\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge (\psi x \rightarrow \chi x))$ | (2) |
| *3.33, *9.13 | $\vdash \forall x (((\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow (\varphi x \rightarrow \chi x))$ | (3) |
| (3), *10.27 | $\vdash \forall x ((\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x (\varphi x \rightarrow \chi x)$ | (4) |
| (2), (4), *2.06 | $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x (\varphi x \rightarrow \chi x)$ | |

Druhému řádku tu rozumíme jako rozepsání prvního řádku podle definice ekvivalence a přechod podle *3.26 k prvnímu členu konjunkce. Důkaz může vypadat i tak, že nejprve odstraníme kvantifikátory, hlavní přechod uděláme bez nich, a nakonec je zase vrátíme:⁹

⁹ Jak se často postupuje v dnešních „kalkulech přirozené dedukce“.

- *10.14 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x))$
 $\rightarrow ((\varphi y \rightarrow \psi y) \wedge (\psi y \rightarrow \chi y))$ (1)
- *3.33 $\vdash \dots \rightarrow (\varphi y \rightarrow \chi y)$ (2)
- (2), *9.13, *10.21 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x (\varphi x \rightarrow \chi x)$

Uvedeme ještě několik tvrzení, která ukazují souvislost dvou složených kvantifikátorů:

***11.2** $\vdash \forall x \forall y \varphi xy \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi xy$

Důkaz:

- *10.1 $\vdash \forall x \forall y \varphi xy \rightarrow \forall y \varphi zy$ (1)
- *10.1 $\vdash \dots \rightarrow \varphi zw$ (2)
- (2), *9.13, *10.21 $\vdash \forall x \forall y \varphi xy \rightarrow \forall z \varphi zw$ (3)
- (3), *9.13, *10.21 $\vdash \forall x \forall y \varphi xy \rightarrow \forall w \forall z \varphi zw$ (4)
- analogicky $\vdash \forall y \forall x \varphi xy \rightarrow \forall z \forall w \varphi zw$ (5)
- (4), (5), *3.2, *4.01 $\vdash \forall x \forall y \varphi xy \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi xy$

***11.26** $\vdash \exists x \forall y \varphi xy \rightarrow \forall y \exists x \varphi xy$

Důkaz:

- *10.1 $\vdash \forall y \varphi xy \rightarrow \varphi xz$ (1)
- (1), *9.13 $\vdash \forall x (\forall y \varphi xy \rightarrow \varphi xz)$ (2)
- (2), *10.28 $\vdash \exists x \forall y \varphi xy \rightarrow \exists x \varphi xz$ (3)
- (3), *9.13, *10.21 $\vdash \exists x \forall y \varphi xy \rightarrow \forall y \exists x \varphi xy$

***11.51** $\vdash \exists x \forall y \varphi xy \leftrightarrow \sim \forall x \exists y \sim \varphi xy$

Důkaz:

- *4.2, *10.01 $\vdash \exists x \forall y \varphi xy \leftrightarrow \sim \forall x \sim \forall y \varphi xy$ (1)
- *10.253 $\vdash \sim \forall y \varphi xy \leftrightarrow \exists y \sim \varphi xy$ (2)
- (2), *9.13 $\vdash \forall x (\sim \forall y \varphi xy \leftrightarrow \exists y \sim \varphi xy)$ (3)
- (3), *10.271 $\vdash \forall x \sim \forall y \varphi xy \leftrightarrow \forall x \exists y \sim \varphi xy$ (4)
- (4), *4.11 $\vdash \sim \forall x \sim \forall y \varphi xy \leftrightarrow \sim \forall x \exists y \sim \varphi xy$ (5)
- (1), (5), *4.22 $\vdash \exists x \forall y \varphi xy \leftrightarrow \sim \forall x \exists y \sim \varphi xy$

... atd.

§77

V uvedených důkazech jsme opět používali pravidla týkající se smyslu výrazů tiše. Jak by důkazy vypadaly¹⁰ s jejich výslovným uvedením, ukážeme na začátku důkazu tvrzení *10.22:

myšl. negace	Výraz $\sim\varphi x$ je výroková funkce	(1)
myšl. negace	Výraz $\sim\psi x$ je výroková funkce	(2)
(1), *9.14	Výraz $\sim\varphi a$ je smysluplný (kde a je konstanta stejného typu jako proměnná x ve výrokové funkci $\sim\varphi x$)	(3)
předpoklad	Proměnná x ve výrokové funkci $\sim\varphi x$ je stejného typu jako proměnná x ve výrokové funkci $\sim\psi x$	(4)
(2), (4), *9.14	Výraz $\sim\psi a$ je smysluplný	(5)
(3), (5), myšl. disjunkce	Výraz $\sim\varphi a \vee \sim\psi a$ je výrok	(6)
(6), myšl. negace	Výraz $\sim(\sim\varphi a \vee \sim\psi a)$ je výrok	(7)
(7), *9.15	Výraz $\sim(\sim\varphi x \vee \sim\psi x)$ je výroková funkce	(8)
(8), *3.01	Výraz $\varphi x \wedge \psi x$ je výroková funkce	(9)
(9), myšl. obecného kvantifikátoru	Výraz $\forall x (\varphi x \wedge \psi x)$ je výrok	(10)
(10), myšl. negace	Výraz $\sim\forall x (\varphi x \wedge \psi x)$ je výrok	(11)
(11), (9), myšl. disjunkce	Výraz $\sim\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \vee (\varphi y \wedge \psi y)$ je výroková funkce	(12)
(12), *2.01	Výraz $\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$ je výroková funkce	(13)
(13), *10.1	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$	(14)

... atd.

Z tohoto rozpisu důkazu je vidět, že obsahuje (na čtvrtém řádku) předpoklad, že proměnná x ve výrokové funkci $\sim\varphi x$ je stejného typu jako proměnná x ve výrokové funkci $\sim\psi x$; bez toho by tvrzená výroková funkce vůbec nebyla smysluplným výrazem. Tvrzený výrok je tedy vlastně podmíněný

10 V PM najdeme jiné příklady jejich použití, např. v důkazu *9.61 apod.

tímto předpokladem. Výchozí tvrzení *1.7 a *1.71 z prvního stupně analýzy tu nahrazujeme odkazem na výchozí myšlenky negace a disjunkce, výchozí tvrzení *1.72 dvojicí výchozích tvrzení *9.14 a *9.15.

Důkaz postupuje stejně jako v §55: nejprve předvádíme, že vhodný výraz je výrokovou funkcí, a až potom k jeho tvrzení přejdeme jako k instanci něčeho už tvrzeného.

§78

Obdobou tvrzení *3.03 je v tomto stupni analýzy následující tvrzení nezapsané umělými výrazy:

***10.13** Obsahují-li dvě výrokové funkce proměnné stejného typu a jsou-li jakékoli jejich hodnoty (těchto funkcí) pravdivé, jakákoli hodnota jejich konjunkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech je pravdivá

Důkaz (pro jednu proměnnou):

myšl. negace Negace té první je výroková funkce (1)

myšl. negace Negace té druhé je výroková funkce (2)

(1), *9.14 Negace té první s nějakou konstantou
stejného typu na místě proměnné je
smysluplný výraz (3)

(2), *9.14 Negace té druhé s toutéž konstantou
stejného typu na místě proměnné je
smysluplný výraz (4)

(3), (4), myšl. disjunkce Disjunkce těchto výrazů je výrok (5)

(5), myšl. negace Jeho negace je výrok (6)

(4), (6), myšl. disjunkce Disjunkce výroků z řádků (5) a (7) je výrok (7)

(3), (7), myšl. disjunkce Disjunkce výroků z řádků (3) a (8) je výrok (8)

(8), *9.15 Tento výraz s proměnnou na místě použité
konstanty je výroková funkce obsahující
tutéž proměnnou na původních místech
v obou skládaných členech (9)

- (9), *1.01, *3.01 Implikace té první výrokové funkce a implikace té druhé a jejich konjunkce je výroková funkce obsahující tutéž proměnnou na původních místech v obou skládaných členech (10)
- (10), *3.2 Implikace té první výrokové funkce a implikace té druhé a jejich konjunkce je výroková funkce obsahující tutéž proměnnou na původních místech v obou skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá (11)
- (11), *9.12 Implikace té druhé a jejich konjunkce je výroková funkce obsahující tutéž proměnnou na původních místech v obou skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá (12)
- (12), *9.12 Jejich konjunkce je výroková funkce obsahující tutéž proměnnou na původních místech v obou skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá

Důkaz pro více proměnných by byl analogický.

Toto tvrzení bylo jako pravidlo použito v původní podobě důkazu tvrzení *10.14:

$$\text{*10.14} \quad \vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$$

Důkaz:

$$\text{*10.1} \quad \vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y \quad (1)$$

$$\text{*10.1} \quad \vdash \forall x \psi x \rightarrow \psi y \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{*10.13} \quad \vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y) \quad (3)$$

$$(3), \text{*3.47} \quad \vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$$

Rozdíl proti důkazu uvedenému v § 76 je v tom, že takto ukazuje jako předpoklad smysluplnosti dokazovaného tvrzení stejnost typu proměnných ve výrokových funkcích φx a ψx .

§ 79

Výchozí myšlenky negace, disjunkce i obecného kvantifikátoru jsou typově víceznačné. Negace je výroková funkce výroků a výroky jsou různých typů; protože ale všechny hodnoty proměnné ve výrokové funkci a všechny konstanty, které mohou být smysluplně na jejím místě, jsou podle pravidla stejnosti typu, tj. podle tvrzení *9.14, stejného typu, jsou negace výroků různých typů různými výrokovými funkcemi. Podobně je tomu s disjunkcí. Obecný kvantifikátor je výroková funkce výrokových funkcí a ty jsou také různých typů, proto je vlastně mnoho obecných kvantifikátorů různých typů. Například tedy negace

$$\sim \text{Petr jde do školy}$$

$$\sim \forall x x \text{ jde do školy}$$

jsou různých typů: první je negace elementárních výroků obsahujících jedno individuum, druhá je negace výroků obsahujících jedno vázané proměnné individuum. Obecné kvantifikátory ve výroku

$$\forall x \forall y x \text{ nese knihu } y$$

jsou také různých typů: zatímco $\forall y$ je v tomto případě výroková funkce elementárních výrokových funkcí obsahujících dvě proměnná individua, $\forall x$ tu je výroková funkce výrokových funkcí obsahujících jedno volné a jedno vázané proměnné individuum.

V tomto smyslu jsou typově víceznačné i všechny výrokové funkce zapísané našimi umělými výrazy. Například

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

je sice výroková funkce výroků, ale ze zápisu není patrné, výroků jakých typů. Aby tento výraz měl smysl, bereme implikaci a disjunkci v něm jako výrokové funkce výroků těch typů, jakých jsou p a $p \vee q$, resp. p a q , ale jaké to jsou, není ze zápisu patrné. Ze zápisu výrokové funkce

$$\forall x \varphi x$$

není patrné, jakého typu je φ , ani x , a tedy ani obecný kvantifikátor; jenom to, že φ je výroková funkce.

Při přechodech k instancím výrokových funkcí se někdy typová víceznačnost zužuje: například výroková funkce

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

má jako svou instanci výrokovou funkci

$$\forall x \varphi x \rightarrow (\forall x \varphi x \vee \forall x \psi x)$$

a i když tedy ze zápisu původní výrokové funkce není patrné, zda je to výroková funkce elementárních nebo neelementárních výroků, bereme-li druhou výrokovou funkci jako její instanci, nemohla to být výroková funkce elementárních výroků. Naopak, kdybychom brali jako její instanci výrok

$$\text{Petr jde do školy} \rightarrow (\text{Petr jde do školy} \vee \sim \text{Michal jde do školy})$$

byla by to výroková funkce elementárních výroků, a tedy by to byla jiná výroková funkce. Na její tvrzení a případný důkaz to ale nemá vliv.

§ 80

Pravidlo stejnosti typu a definice stejnosti typu spolu s pravidlem nahrazování konstant a proměnných předcházejí paradoxům. Tím, že součástí naší analýzy jsou i výroky o smyslu výrazů, a pozorností, kterou smysluplnosti výrazů věnujeme, předcházíme užívání výrazů se zmateným smyslem. Užíváním výrokových funkcí a prozkoumáváním toho, co může být hodnotami jejich proměnných, bychom mohli být svedeni k dojmu, že výroková funkce může být sama hodnotou své proměnné (třeba podobně jako negaci jako výrokovou funkci výroků skládáme samu se sebou opakovaně do složitější funkce). Tak to ale není. Například elementární výroková funkce

$$x \text{ jde do školy}$$

obsahuje proměnnou x , jejímiž hodnotami mohou být individua (bereme-li jména „Petr“ a „Michal“ jako individua), a podle pravidla *9.14 je tato

proměnná i všechny ostatní proměnné a konstanty, s nimiž je na jejím místě tento výraz smysluplný, stejného typu. Tato výroková funkce samotná stejného typu jako individua není a na místě proměnné x smysl nedává:

Výroková funkce „ x jde do školy“ jde do školy

není smysluplný výraz. Ať už tedy podle pravidla *9.15 přecházíme z toho, že je to výroková funkce, k jakémukoli tvrzení, že něco je výrok, rozhodně dosazujeme na místa proměnné x jenom konstantní individua, a naopak. Podobně

φx

je výroková funkce, u níž sice výslovně neříkáme, jakého je typu, a jakého je tedy typu její proměnná, ale podle pravidla *9.14 je proměnná x i všechny ostatní proměnné a konstanty, s nimiž je na místě x tento výraz smysluplný, stejného typu. Podle definice stejnosti typu ale není samotná funkce φ stejného typu jako x , ať už je x jakéhokoli typu. Výraz

$\varphi\varphi x$

není smysluplný, pokud v něm výraz φx bereme jako výrokovou funkci.

§81

Kdybychom v myšlenkách a postupech, které analyzujeme nebo chceme analyzovat, našli myšlenky, které takto nepředvedeme, nebo bychom potřebovali další výchozí kroky, nic nám nebrání je přidávat. I kdybychom v našich důkazech našli kroky, které bychom chtěli dále rozmotávat, přidáme výchozí myšlenky nebo výchozí kroky podle potřeby.

Předvedený postup to nenaruší, protože nikde jsme nemluvili o celku našich výchozích myšlenek a kroků, resp. o tom, že to jsou všechny.

3. kapitola

§ 82

Seznámení s tím, co děláme, se prohloubí, když se nad tím zamyslíme. Jako příležitost k zamyšlení teď využijeme něco z toho, co by na předvedených myšlenkách a postupu mohlo být neočekávané pro toho, kdo se ve škole naučil logiku. Pokusíme se odpovědět na tři otázky, které předchází výklad vyvolává.

§ 83

První otázka, kterou si položíme, je: v jakém smyslu jsou naše výchozí myšlenky nedefinované? Za definování bychom tu považovali odpověď na otázku „co je...?“ nebo „co je podstata...?“, která by vycházela z myšlenek nějak předcházejících to, na co bychom se ptali:

Co je výrok?

Co je elementární výrok?

Co je výroková funkce?

Co je tvrzení výroku?

... atd.

§ 84

V našem postupu (od §§ 21 a 30) jsou definice takovými kroky, jimiž zavádíme výrazovou zkratku za něco, co umíme pomocí našich výchozích myšlenek předvést. Tyto výrazové zkratky přitom umíme zpátky rozepsat tak, jako bychom je vůbec nepoužili, ale bez nich by náš postup nebyl

přehledný a stručný a nemohli bychom tvořit výčty (což máme v úmyslu podle §§ 7 a 8).

Zkrácené výrazy implikace, konjunkce a ekvivalence jsme zavedli (v § 42) takto:

- *1.01 $p \rightarrow q$ je zkratka za $\sim p \vee q$
- *3.01 $p \wedge q$ je zkratka za $\sim(\sim p \vee \sim q)$
- *4.01 $p \leftrightarrow q$ je zkratka za $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

a vidíme, že implikace a konjunkce jsou zavedené jako zkratky za výrazy předvedené pomocí výchozích myšlenek negace a disjunkce a ekvivalence jako zkratka za výraz předvedený už s jejich pomocí.

Zavedené zkratky používáme v rozvoji dalšího postupu nejen tak, že s jejich pomocí předvádíme něco, co dále zkracujeme, ale i tak, že s jejich pomocí děláme další kroky. Například v pravidle inference (§ 46) používáme implikaci:

- *1.1 Cokoli implikovaného pravdivým elementárním výrokem je pravdivé
- *1.11 Je pravdivá jakákoli hodnota elementární výrokové funkce, která je implikovaná elementární výrokovou funkcí, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá

a právě tak používáme implikaci ve výchozích tvrzeních výrokových funkcí, např.

- *1.2 $\vdash (p \vee p) \rightarrow p$

na jejichž instance se potom pravidlo inference vztahuje. S ohledem na toto použití jsme implikaci jako výrazovou zkratku zavedli (viz § 43).

Zpětný přechod k výchozím myšlenkám, pomocí nichž jsme zkracovaný výraz předvedli, potom používáme při vlastním rozmyšlení si pravdivosti výchozích tvrzení obsahujících zavedené zkratky. Např. při rozmyšlení si pravdivosti výše uvedeného tvrzení *1.2 (v § 44) si převádíme implikaci na disjunkci negace jejího předního členu a jejího zadního členu, a o pravdivosti této disjunkce uvažujeme. Se zpětným přechodem k výchozím myšlenkám, nebo naopak s přechodem od jejich výrazů ke zkráceným výrazům také počítáme při hledání úlohy výchozích tvrzení v dalším rozvoji.

Např. některé instance disjunkce v předním členu výrokové funkce tvrzení v *1.2 by se daly zapsat jako implikace a naopak:

$$(\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$$

je instance této výrokové funkce a zkrátíme ji jako

$$(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$$

Podle definic přecházíme oběma směry v důkazech (v §§ 54 a 76). Například v důkazu tvrzení *3.26

*2.02, *1.01	$\vdash \sim p \vee (\sim q \vee p)$	(1)
*2.31	$\vdash (\sim p \vee (\sim q \vee p)) \rightarrow ((\sim p \vee \sim q) \vee p)$	(2)
(1), (2), *1.11	$\vdash (\sim p \vee \sim q) \vee p$	(3)
*2.53	$\vdash ((\sim p \vee \sim q) \vee p) \rightarrow (\sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow p)$	(4)
(3), (4), *1.11	$\vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow p$	(5)
(5), *3.01	$\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$	

nejprve přejdeme na prvním řádku podle definice implikace z tvrzení

$$\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

k jeho rozpisu

$$\vdash \sim p \vee (\sim q \vee p)$$

a potom z pátého řádku k šestému podle definice konjunkce z tvrzení

$$\vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow p$$

k jeho zkratce

$$\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$$

Tyto zkrácené umělé výrazy a jejich rozpisy se v obou směrech implikují, tj. jsou ekvivalentní. Tvrzení jakékoli takové výrokové funkce dokážeme podobně jako tvrzení *3.1:

$$*3.1 \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

Důkaz:

$$*2.08 \quad \vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \quad (1)$$

$$(1), *3.01 \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

tedy nejprve přejdeme k instanci výrokové funkce tvrzené v *2.08, kde příslušný rozpis implikuje sám sebe, a potom nahradíme jeden z jeho výskytů zkratkou. Tvrzení ekvivalence $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$ bychom pak dokazovali třeba použitím tvrzení *4.2 na místě *2.08:

$$*4.2 \quad \vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \quad (1)$$

$$(1), *3.01 \quad \vdash (p \wedge q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

Přes tuto souvislost ale definice nejsou ekvivalencemi, jak bychom mohli mít dojem.

Mohli bychom také mít dojem, že stejně jako přecházíme z výrokové funkce

$$p \rightarrow q$$

k výrokové funkci

$$\sim p \vee q$$

a naopak, budeme přecházet i z výrokové funkce

$$\sim p \rightarrow q$$

k výrokové funkci

$$p \vee q$$

a naopak. Jeden takový přechod, a to $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$, je tvrzený v *2.53, jeho důkaz je ale poměrně složitý:

$$*2.12 \quad \vdash p \rightarrow \sim\sim p \quad (1)$$

$$*2.38 \quad \vdash (p \rightarrow \sim\sim p) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (\sim\sim p \vee q)) \quad (2)$$

$$\begin{array}{ll}
 (1), (2), *1.11 & \vdash (p \vee q) \rightarrow (\sim\sim p \vee q) \\
 (3), *1.01 & \vdash (p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)
 \end{array} \quad (3)$$

k dokázání této implikace tu používáme princip dvojité negace a jeho vstup do předního členu disjunkce, což jsou samostatné kroky. Takovéto přechody tedy nejsou dány pouhým zavedením zkratk.

Kroky v důkazech používající přechody pomocí rozpisů zkratk nebo naopak zkracování se ovšem často opakují, a proto je, jako jiné často se opakující posloupnosti kroků, v zápisech důkazů zkracujeme. Podobně jako zkracujeme např. postup v důkazu tvrzení *2.2 z

$$\begin{array}{ll}
 *1.3 & \vdash p \rightarrow (q \vee p) \\
 *1.4 & \vdash (q \vee p) \rightarrow (p \vee q) \\
 *2.06 & \vdash (p \rightarrow (q \vee p)) \rightarrow (((q \vee p) \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \vee q))) \\
 (1), (3), *1.11 & \vdash ((q \vee p) \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \vee q)) \\
 (2), (4), *1.11 & \vdash p \rightarrow (p \vee q)
 \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

na

$$\begin{array}{ll}
 *1.3 & \vdash p \rightarrow (q \vee p) \\
 *1.4 & \vdash (q \vee p) \rightarrow (p \vee q) \\
 (1), (2), *2.06 & \vdash p \rightarrow (p \vee q)
 \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

píšeme místo

$$\begin{array}{ll}
 *2.08 & \vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \\
 (1), *3.01 & \vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)
 \end{array} \quad (1)$$

rovnou

$$*2.08, *3.01 \quad \vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

a potom u ekvivalence přecházíme z obou dvou členů jejího rozpisu rovnou k ní a od ní k jednomu z nich, viz např. důkaz tvrzení *10.22, který jsme zkrátali z

$$*10.1 \quad \vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y) \quad (1)$$

*3.26	$\vdash \dots \rightarrow \varphi y$	(2)
(2), *9.13	$\vdash \forall y (\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \varphi y)$	(3)
*10.21	$\vdash \forall y (\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \varphi y) \leftrightarrow (\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \varphi y)$	(4)
(4), *4.01, *3.26	$\vdash \forall y (\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \varphi y) \rightarrow (\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \varphi y)$	(5)
(3), (5), *9.12	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \varphi y$	(6)
analogicky, s *3.27	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \psi y$	(7)
(6), (7), *3.43	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\forall y \varphi y \wedge \forall y \psi y)$	(8)
*10.14	$\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$	(9)
(9), *9.13	$\vdash \forall y ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y))$	(10)
*10.21	$\vdash \forall y ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)) \leftrightarrow ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow \forall y (\varphi y \wedge \psi y))$	(11)
(11), *4.01, *3.26	$\vdash \forall y ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)) \rightarrow ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow \forall y (\varphi y \wedge \psi y))$	(12)
(10), (12), *9.12	$\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow \forall y (\varphi y \wedge \psi y)$	(13)
(8), (13), *3.2, *4.01	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \leftrightarrow (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x)$	

na

*10.1	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$	(1)
*3.26	$\vdash \dots \rightarrow \varphi y$	(2)
(2), *9.13, *10.21	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \varphi y$	(3)
analogicky, s *3.27	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \psi y$	(4)
(3), (4), *3.43	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\forall y \varphi y \wedge \forall y \psi y)$	(5)
*10.14	$\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$	(6)
(6), *9.13, *10.21	$\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow \forall y (\varphi y \wedge \psi y)$	(7)
(5), (7), *3.2, *4.01	$\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \leftrightarrow (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x)$	

a kde už jeden z přechodů podle definice ani nezmiňujeme. Stejně jako zkratky jednotlivých výrazů umíme zkratky zápisů důkazů podle potřeby zpátky rozepsat.

V důkazech, v nichž nevynecháváme kroky týkající se smyslu umělých výrazů, přecházíme podle definic od výroků o smyslu nezkrácených výrazů k výrokům o zkratkách, např. v důkazu tvrzení *2.01 (v §55) přecházíme od výroku

Výraz $\sim(\sim p \vee \sim p) \vee \sim p$ je elementární výroková funkce

k výroku

Výraz $(\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$ je elementární výroková funkce

protože v pravidlech *1.7, *1.71 a *1.72 mluvíme jenom o výchozích myšlenkách negace a disjunkce. Výroky o smyslu se na zkratky vztahují stejně jako na jejich rozpisy, protože zkrácení zápisu smysl nemění.

V druhém stupni analýzy (v § 66) jsme rozšířili definice implikace, konjunkce a ekvivalence i na neelementární výrazy v návaznosti na toto rozšíření u výchozích myšlenek negace a disjunkce. I když se na zápisu přitom nic nezměnilo, je to zavedení nových zkratek za nové výrazy.

Zkrácený výraz existenčního kvantifikátoru jsme v druhém stupni analýzy (v § 65) zavedli definici

***10.01** $\exists x \varphi x$ je zkratka za $\sim \forall x \sim \varphi x$

z níž vidíme, že nezkracujeme jenom výrazy složených výrokových funkcí výroků, ale i výrazy složené jak z výrokových funkcí výroků, což jsou v tomto případě obě negace, tak i z výrokových funkcí výrokových funkcí, což je obecný kvantifikátor. Rozumění zkrácenému výrazu tu může být náročnější než další používání zkratky.

Nezkracujeme ale jenom umělé výrazy, zavedli jsme i zkratku za výrazy o jejich smyslu (v § 67):

***9.131** To, že dva výrazy jsou stejného typu, je zkratka za to, že jsou oba individua, že jsou oba elementární výroky obsahující jedno individuum, že jsou oba elementární výrokové funkce jednoho individua, že jsou oba elementární výroky obsahující dvě individua, že jsou oba elementární výrokové funkce jednoho individua obsahující ještě jedno konstantní individuum, že jsou oba elementární výrokové funkce dvou individuí... atd., tj. že jsou oba elementární výroky nebo elementární výrokové funkce a obsahují stejné počty výrazů stejných typů; a pokud to jsou neelementární výroky nebo neelementární výrokové funkce, že jsou oba navíc neelementární ve stejném smyslu, tj. že jsou oba výroky obsahující jedno vázané proměnné individuum, že jsou oba výrokové funkce obsahující jedno vázané proměnné a jedno volné proměnné individuum... atd., že jsou

oba výroky obsahující jednu vázanou proměnnou stejného typu... atd.

Tuto zkratku také umíme zpátky rozepsat, i když tento rozpis by zase obsahoval několik výrazů „... atd.“ a induktivní krok, tj. další používání této zkratky za jednodušší výrazy obsažené ve výrazech, o jejichž smyslu by byla řeč. Protože ale složitost každého výrazu je konečná, po nějakém, byť různém, počtu takovýchto rozpisů bychom se bez dalšího opakování této zkratky obešli. V jednotlivých případech výrazů, které by nebyly typově víceznačné, bychom se obešli i bez toho. Například řekneme-li (jako v § 77)

a je konstanta stejného typu jako proměnná x ve výrokové funkci $\sim\varphi x$

je to zkratka za

konstanta a a proměnná x ve výrokové funkci $\sim\varphi x$ jsou obě individua, nebo jsou obě elementární výroky obsahující jedno individuum, nebo jsou obě elementární výrokové funkce jednoho individua... atd., nebo jsou obě elementární výroky nebo elementární výrokové funkce a obsahují stejné počty výrazů stejných typů; a pokud to jsou neelementární výroky nebo neelementární výrokové funkce, jsou obě navíc neelementární ve stejném smyslu, tj. jsou obě výroky obsahující jedno vázané proměnné individuum... atd., nebo jsou obě výroky obsahující jednu vázanou proměnnou stejného typu... atd.

Z tohoto rozpisu opětovné použití zkratky „stejného typu“ odstraníme po konečném počtu dalších rozpisů. Protože ale nevíme, po jakém počtu, museli bychom tady použít výraz „... atd.“, dokud neprojdeme celé složení toho, co výrazy obsahují“. Kdybychom naopak řekli např.

Výroková funkce „ x jde do školy“ je stejného typu jako proměnná ψ ve výrokové funkci $\sim\varphi\psi$

je to jednoduše zkratka za

Výroková funkce „ x jde do školy“ je elementární výroková funkce jednoho individua stejně, jako proměnná ψ ve výrokové funkci $\sim\varphi\psi$

což je výraz používající pouze naše výchozí myšlenky.

Stejně jako zavedené zkratky umělých výrazů používáme i zkratku výrazu o smyslu výrazů v dalších krocích, především v pravidle jednoho typu a v krocích podle něj, v nichž předcházíme paradoxům (viz §80).

Naše definice bychom tedy mohli považovat za odpovědi na otázky

Co je implikace?

Co je konjunkce?

Co je ekvivalence?

Co je existenční kvantifikátor?

Co je být stejného typu?

které vycházejí z našich výchozích myšlenek tak, že tyto výrazy zavádějí jako zkratky.

§85

Mohli bychom mít ale dojem, že jsme odpovídali i na podobné otázky po výchozích myšlenkách. Když jsme je uváděli, používali jsme výraz

tím a tím... rozumíme... to a to...

Říkali jsme (v §36)

- elementárním výrokiem rozumíme takový výrok, který neobsahuje žádné vázané proměnné;
- elementární výrokovou funkcí rozumíme takovou výrokovou funkci, která by se po udělení nějakých hodnot svým proměnným stala elementárním výrokiem;
- tvrzením elementárního výroku rozumíme jeho kladení, na rozdíl od přemýšlení o něm;
- tvrzením elementární výrokové funkce rozumíme tvrzení jakékoli její hodnoty;
- disjunkcí rozumíme takovou elementární výrokovou funkci obsahující dvě proměnné, jejíž hodnota (tj. výrok, jímž se stane) je pravdivá, když jejím proměnným udělíme jako hodnoty elementární výroky, z nichž je aspoň jeden pravdivý, a jejíž hodnota je nepravdivá, když jejím proměnným

- ným udělíme jako hodnoty nepravdivé elementární výroky; disjunktci zapisujeme umělým výrazem;
- negaci rozumíme takovou elementární výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, jejíž hodnota je pravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu nepravdivý elementární výrok, a jejíž hodnota je nepravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu pravdivý elementární výrok; negaci zapisujeme umělým výrazem.

Kdybychom tyto věty považovali za definice a výraz „rozumíme“ brali jako „je“ ve smyslu otázky „co je...?“ nebo „co je podstata...?“, vycházela by odpověď na otázku po elementárním výroku z myšlenek výroku, obsahování výrazu výrazem a vázané proměnné; odpověď na otázku po elementární výrokové funkci by vycházela z myšlenek elementárního výroku a výrokové funkce, přičemž bychom udělování hodnot brali jako patřící k myšlence proměnné, a tím i k myšlence výrokové funkce; odpověď na otázku po tvrzení elementárního výroku by vycházela z myšlenek elementárního výroku a kladení něčeho v protikladu k přemýšlení o tom; odpověď na otázku po tvrzení elementární výrokové funkce by vycházela z myšlenek elementární výrokové funkce a tvrzení elementárního výroku; odpovědi na otázky po disjunktci a negaci by vycházely z myšlenek umělého výrazu, elementární výrokové funkce a elementárního výroku, přičemž bychom pravdivost a nepravdivost brali jako patřící k myšlence výroku. Naše výchozí myšlenky by tedy byly předcházeny myšlenkami

výroku
 obsahování výrazu výrazem
 vázané proměnné
 výrokové funkce
 kladení
 umělého výrazu

a myšlenka výrokové funkce by dále byla předcházena myšlenkami

proměnné
 udělování hodnot

a myšlenka výroku myšlenkami

pravdivosti
nepravdivosti

Protože ale myšlenka vázané proměnné zjevně vychází až z naší myšlenky obecného kvantifikátoru, museli bychom rovnou vzít do úvahy i odpovědi na otázky po výchozích myšlenkách druhého stupně analýzy. První stupeň by druhému předcházel jakoby z hlediska jednoduchosti, ale ne z hlediska myšlenek. Říkali jsme (v § 58):

- obecným kvantifikátorem rozumíme takovou výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, (1) jejíž hodnota je pravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu takovou výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, jejíž všechny hodnoty jsou pravdivé, a (2) jejíž hodnota je nepravdivá, když její proměnné udělíme jako hodnotu takovou výrokovou funkci obsahující jednu proměnnou, která má nějakou nepravdivou hodnotu; obecný kvantifikátor zapisujeme umělým výrazem;
- individuem rozumíme takový výraz, který sám není ani výrokem, ani výrokovou funkcí.

Odpověď na otázku po obecném kvantifikátoru by tedy vycházela z myšlenek umělého výrazu, výrokové funkce a výroku; odpověď na otázku po individuu jen z myšlenek výrokové funkce a výroku. Myšlenka vázané proměnné by byla předcházená myšlenkami výrokové funkce a výroku. Vypadalo by to tedy tak, že naše výchozí myšlenky by byly předcházeny myšlenkami

výroku
obsahování výrazu výrazem
výrokové funkce
kladení
umělého výrazu
proměnné
udělování hodnot
pravdivosti
nepravdivosti

Vezmeme-li do úvahy i uvedení umělého výrazu, proměnné, výroku a výrokové funkce (z první kapitoly, §§ 1, 11, 12, 13)

- umělým výrazem rozumíme takový výraz, jehož smysl je natolik pevný a natolik v našich rukou, nakolik budeme potřebovat;
- proměnou rozumíme takový výraz, který může mít různé hodnoty;
- výrokem rozumíme takový výraz, který může být pravdivý nebo nepravdivý;
- výrokovou funkcí rozumíme takový výraz, který obsahuje nějaké proměnné a z něhož by se po udělení nějakých hodnot těmto proměnným stal výrok;

šlo by jen o myšlenky

výrazu
pevného smyslu
obsahování výrazu výrazem
udělování hodnot
kladení
pravdivosti
nepravdivosti

Pod dojmem toho, že uvedení našich výchozích myšlenek bychom mohli považovat za takovéto definice, by nám už naše výchozí myšlenky nepřipadaly výchozí.

§ 86

Nebo bychom mohli mít dojem, že aspoň výrok a výrokovou funkci definujeme pomocí výchozích konstantních individuí, výchozích konstantních elementárních výrokových funkcí individuí (těm by se dnes říkalo „relace“), negace, disjunkce, obecného kvantifikátoru a proměnných. Postupovali bychom tak, že bychom nejprve induktivně odpověděli na to, co je výrokový výraz:

- a) výchozí konstantní elementární výrokové funkce jsou výrokové výrazy
- b) výchozí konstantní elementární výrokové funkce s výchozími konstantními individui na místech svých proměnných jsou výrokové výrazy
- c) negace a disjunkce výrokových výrazů jsou výrokové výrazy
- d) obecný kvantifikátor výrokového výrazu obsahujícího proměnnou je výrokový výraz
- e) výrokový výraz, v němž nějaké konstanty nebo složení konstant nahradíme proměnnými, je výrokový výraz

a potom rozlišili výroky a výrokové funkce:

- f) výrok je výrokový výraz neobsahující volné proměnné
- g) výroková funkce je výrokový výraz obsahující volné proměnné

a případně i:

- h) elementární výrok je výrok neobsahující vázané proměnné
- i) elementární výroková funkce (nejenom výchozí) je výroková funkce neobsahující vázané proměnné

Například bychom mohli vzít jako výchozí konstantní individua výrazy

Michal
Petr

a jako výchozí konstantní elementární výrokové funkce individuí výrazy

x jde do školy
x nese knihu y

pak podle a) jsou obě tyto konstantní elementární výrokové funkce výrokové výrazy, dále podle b) jsou výrokové výrazy i

Petr jde do školy
Michal jde do školy
x nese knihu Petrovi
... atd.

podle c) jsou výrokové výrazy jejich disjunkce a negace

$$\begin{aligned} & \text{Petr jde do školy} \vee \text{Petr nese knihu Michalovi} \\ & \sim(\text{Petr jde do školy} \vee x \text{ nese knihu Michalovi}) \\ & \dots \text{ atd.} \end{aligned}$$

podle d) potom i

$$\begin{aligned} & \forall x \, x \text{ nese knihu Petrovi} \\ & \forall x \, \sim(\text{Petr jde do školy} \vee x \text{ nese knihu Michalovi}) \\ & \dots \text{ atd.} \end{aligned}$$

a znovu podle c)

$$\begin{aligned} & \text{Petr jde do školy} \vee \forall x \, \sim(\text{Petr jde do školy} \vee x \text{ nese knihu Michalovi}) \\ & \dots \text{ atd.} \end{aligned}$$

Podle e) jsou vzniknou výrokové výrazy z

$$\text{Petr jde do školy} \vee \text{Petr nese knihu Michalovi}$$

nahrazením konstanty „Petr“ proměnnou y :

$$y \text{ jde do školy} \vee y \text{ nese knihu Michalovi}$$

nebo konstanty „ x jde do školy“ proměnnou φ , kterou tedy bereme v tomto případě jako proměnnou elementární výrokovou funkci jednoho individua:

$$\varphi \text{Petr} \vee \text{Petr nese knihu Michalovi}$$

Nahradit můžeme ale také celé složení obou elementárních výrokových funkcí a disjunkce, protože disjunkce je konstantní výraz, a vznikne

$$\varphi \text{Petr Michal}$$

kde φ bereme jako proměnnou elementární výrokovou funkci dvou individuí. Kdybychom podobně nahradili proměnnou celé složení konstantního

individua „Michal“, obou konstantních elementárních výrokových funkcí, disjunkce, negace a obecného kvantifikátoru ve výrazu

$$\forall x \sim (\text{Petr jde do školy} \vee x \text{ nese knihu Michalovi})$$

vznikl by výraz

$$\varphi \text{Petr}$$

kde bychom φ brali jako proměnnou výrokovou funkci jednoho individua obsahující ještě jedno vázané proměnné individuum a jedno konstantní individuum. Tuto proměnnou bychom mohli podle d) kvantifikovat a podle c) dále skládat např. do

$$\sim \forall \varphi \varphi \text{Petr}$$

což by byl také výrokový výraz. Podle toho, zda tyto výrazy obsahují nebo neobsahují volné nebo vázané proměnné, a podle toho, zda je bereme jako proměnné nebo jako hodnoty, je podle f), g), h) a i) rozdělíme na výroky, výrokové funkce, elementární výroky a elementární výrokové funkce.

Mohli bychom ale tuto definici považovat za nedostatečnou, protože mezi výrokové funkce by nepatřil např. výraz

$$\text{Je dobře, že } p$$

který bychom potom asi brali jako zkratku za jiný výraz. Kdybychom chtěli tvořit výrazy i z dalších výchozích výrokových funkcí, které by nebyly elementárními výrokovými funkcemi individuí, upravili bychom definici třeba takto:

- a) výchozí konstantní výrokové funkce jsou výrokové výrazy
- b) výchozí konstantní výrokové funkce s vhodnými výchozími konstantami (ať už individuí, nebo výrokovými funkcemi, případně jejich složeními) na místech svých proměnných jsou výrokové výrazy
- c) negace a disjunkce výrokových výrazů jsou výrokové výrazy
- d) obecný kvantifikátor výrokového výrazu obsahujícího proměnnou je výrokový výraz

e) výrokový výraz, v němž nějaké konstanty nebo složení konstant nahradíme proměnnými, je výrokový výraz

a potom opět rozlišili výroky a výrokové funkce:

f) výrok je výrokový výraz neobsahující volné proměnné

g) výroková funkce je výrokový výraz obsahující volné proměnné

a po této úpravě bychom už zmíněnou výrokovou funkci mohli brát jako výchozí. Podobně bychom mezi výchozí výrazy mohli vzít i výroky, které by pak nebyly pouhými složeninami z výrokových funkcí a individuí.

Pod dojmem toho, že bychom považovali výroky a výrokové funkce za nějak takto definované, by nám jako výchozí připadaly myšlenky jednotlivých konstantních i proměnných výrazů.

§87

Podívejme se, co se o výchozích myšlenkách a definování dočteme v *Principia Mathematica*:

*Definice je vyhlášení, že jistý nově zavedený symbol nebo složení symbolů má znamenat to samé, jako jisté jiné složení symbolů, jejichž smysl už známe.*¹¹

Jde tu o zavedení nového výrazu jako zkratky za složení už známých výrazů. Tak, jak jsme definice v druhé kapitole předvedli. Zkracované výrazy předcházejí zkratky v tom, že jejich smysl známe už před zavedením zkratk. A dále:

Je třeba si všimnout, že definice, přísně vzato, není součástí pojednání, v němž se vyskytuje. Definice se totiž zabývá jenom symboly, ne tím, co symbolizují. Navíc není ani pravdivá, ani nepravdivá, neboť je výrazem volby, ne výrokem.

¹¹ PM, s. 11: *A definition is a declaration that a certain newly-introduced symbol or combination of symbols is to mean the same as a certain other combination of symbols of which the meaning is already known.*

[...] *definice nejsou žádnou součástí našeho pojednání, ale, přísně vzato, jsou pouhým typografickým usnadněním.*¹²

Mohli bychom se úplně obejít bez nich, pokud by pro nás nebyla stručnost a přehlednost výkladu důležitá; všechny výrazy, které je obsahují, umíme beze změny smyslu rozepsat zpátky. Je naše volba, že své výrazy právě takto zkracujeme. Kdybychom tedy považovali naše definování za odpovídání na otázku „co je...?“ nebo „co je podstata...?“, znamenala by tato otázka „co se rozhodujeme zkrátit výrazem...?“ a to je nejspíš něco jiného, než jsme čekali.

Na druhou stranu podle autorů definice ukazují to nejdůležitější:

*...je nicméně pravda, že často přinášejí důležitější sdělení, než jaké je obsaženo ve výrocích, v nichž jsou užity. To má dvě příčiny. Zaprve definice obvykle naznačuje, že definiens si zaslouží pozorné uvážení. Tudiž soubor definic představuje náš výběr témat a naše posouzení toho, co je nejdůležitější. Zadrhé když je definované (což se často stává) něčím už blízkým, [...] obsahuje definice analýzu běžné myšlenky, a může být tedy výrazem významného pokroku. [...] V takových případech je definice ‚určováním‘: dává určitost myšlenky, která byla předtím více nebo méně vágní.*¹³

Jinými slovy: právě z definic je vidět postup analýzy předváděné v našem pojednání. To ale nic nemění na tom, že bychom se mohli obejít bez nich: stejně bychom postupně předvedli všechna uvedená tvrzení; náš výběr témat by se nezměnil, jen by jejich výklad nebyl stručný a přehledný. Než jsme se dali do analyzování, tato témata nám už byla blízká. Otázka „co

12 Tamtéž: *It is to be observed that a definition is, strictly speaking, no part of the subject in which it occurs. For a definition is concerned wholly with the symbols, not with what they symbolize. Moreover it is not true or false, being the expression of a volition, not of a proposition. [...] the definitions are no part of our subject, but are, strictly speaking, mere typographical conveniences.*

13 Tamtéž, s. 11 a 12: *... it is nevertheless true that they often convey more important information than is contained in the proposition in which they are used. This arises from two causes. First, a definition usually implies that the definiens is worthy of careful consideration. Hence the collection of definitions embodies our choice of subjects and our judgment as to what is most important. Secondly, when what is defined is (as often occurs) something already familiar, [...] the definition contains an analysis of a common idea, and may therefore express a notable advance. [...] In such cases, a definition is a making definite: it gives definiteness to an idea which had previously been more or less vague.*

je...?“ nebo „co je podstata...?“ vztažená na tato témata by mohla znamenat „jak analyzujeme...?“ nebo „jak pomocí výchozích myšlenek předvádíme...?“ a naše zavádění zkratk by ukazovalo postup odpovědi. Např. zatímco otázka

Co je implikace?

jako otázka po definici naší výrokové funkce je otázkou

Co se rozhodujeme zkrátit výrazem „implikace“?

přenášení pravdivosti je jednou z analyzovaných myšlenek, a proto otázka

Co je přenášení pravdivosti?

je otázkou

Jak pomocí výchozích myšlenek předvádíme přenášení pravdivosti?

a ze zavedení implikace jako zkratky je postup naší analýzy vidět.

Ať už nám jde o kteroukoli z těchto otázek, výchozích myšlenek se podle textu netýká:

Protože všechny definice termínů jsou provedeny pomocí jiných termínů, každý nekruhový systém definic musí začínat z jisté soustavy termínů nedefinovaných. Je do jisté míry volitelné, které myšlenky vezmeme v matematice jako nedefinované; motivem, který povede naši volbu, bude (1) snížit co nejvíce jejich počet a (2) ze dvou stejně velkých systémů vybrat ten, který vypadá jako jednodušší a snazší. Nevíme o žádném způsobu jak dokázat, že takový a takový systém nedefinovaných myšlenek jich při takových a takových výsledcích obsahuje nejméně. Můžeme tedy jen říci, že takové a takové myšlenky jsou nedefinované v takovém a takovém systému, ale ne, že jsou nedefinovatelné.¹⁴

14 Tamtéž, s. 91: *Since all definitions of terms are effected by means of other terms, every system of definitions which is not circular must start from a certain apparatus of undefined terms. It is to some extent optional what ideas we take as undefined in mathematics; the motives guiding our choice will be (1) to make the number of undefined ideas as small as possible, (2) as between two systems in which the number is equal, to choose the one which seems the simpler and easier. We know no way*

Každá část tohoto prohlášení zaslouží pozornost:

- a) některé myšlenky jsou nedefinované
- b) vybíráme si je
- c) vybíráme si je s ohledem na jejich co nejmenší počet a na jednoduchost a snadnost výkladu
- d) neumíme dokazovat, že náš výběr je v tomto ohledu nejlepší
- e) proto mluvíme jen o nedefinovanosti v našem postupu, ne o nedefinovatelnosti

A ještě ostřejší formulace následuje:

Výchozí myšlenky jsou vyloženy pomocí popisů, které mají čtenáři ukázat, co je míněno; tyto výklady ale nejsou definicemi, protože ve skutečnosti používají myšlenky, které vykládají.¹⁵

Uvádění výchozích myšlenek není jejich definováním, ale jen jejich ukázáním.

Naše výchozí myšlenky tedy nejsou definované a předcházejí naše další myšlenky právě v tom, že z nich náš další postup vychází. Protože jsme je nevybírali podle ničeho jiného, než podle jejich nízkého počtu a jednoduchosti a snadnosti z nich rozvinutého postupu, neptáme se, zda jsou opravdu výchozí.

§ 88

Dojem, že uvádění výchozích myšlenek výrazem

tím a tím... rozumíme... to a to...

of proving that such and such a system of undefined ideas contains as few as will give such and such results. Hence we can only say that such and such ideas are undefined in such and such a system, not that they are indefinable.

15 Tamtéž, s. 91: *The primitive ideas are explained by means of descriptions intended to point out to the reader what is meant; but the explanations do not constitute definitions, because they really involve the ideas they explain.*

je definování, je zavádějící, protože tady zmíněné myšlenky předcházejí našim výchozím myšlenkám jinak: nejsou to výchozí myšlenky našeho postupu, ale jsou nám už blízké v tom, co analyzujeme a jak jsme se to rozhodli dělat.

A dojem, že bychom měli vyjít z myšlenek jednotlivých konstantních a proměnných výrazů a z nich naše výchozí myšlenky definovat, je podobně zavádějící. Pokud některé z nich našim výchozím myšlenkám předcházejí, jsou nám už blízké jako zamýšlené příklady.

§89

Druhá otázka, kterou si položíme, je: neměli bychom přidat další pravidla, tak aby byl každý krok v našich důkazech podle nějakého z nich? Přitom bychom tu za pravidlo považovali předpis nebo popis předělávání jedněch umělých výrazů na jiné.

§90

V našem postupu (opět od §§ 21 a 30) jsou pravidla všechna tvrzení, ať už zapsaná umělými výrazy, nebo ne. Tvrzení zapsaná umělými výrazy používáme někdy jako pravidla a někdy jako předpoklady pravidel, tvrzení nezapsaná umělými výrazy používáme jenom jako pravidla, a proto je rovnou i nazýváme „pravidla“.

V prvním stupni analýzy jsou mezi výchozími kroky tvrzení výroků, o nichž mluvíme jako o pravidlech

inference,
zachování elementárnosti výroků,
identifikace proměnné.

Pravidlo inference zní:

***1.1** Cokoli implikovaného pravdivým elementárním výrokem je pravdivé

- *1.11** Je pravdivá jakákoli hodnota elementární výrokové funkce, která je implikovaná elementární výrokovou funkcí, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá

Obě podoby tohoto pravidla bereme jako pravdivé nepodmíněné výroky a druhou z nich jen jako rozvinutí té první (viz §46). Používáme v nich výrazovou zkratku implikace, kterou jsme právě pro toto použití zavedli. Kdybychom se chtěli obejít bez ní a toto pravidlo zapsat ve výrazech výchozích myšlenek, znělo by:

- *1.1** Cokoli, co je v pravdivé disjunkci s negací pravdivého elementárního výroku, je pravdivé
- *1.11** Je pravdivá jakákoli hodnota elementární výrokové funkce, která je v takové disjunkci s elementární výrokovou funkcí, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá.

(což jsme uvedli v §47). Pravidla zachování elementárnosti výroků znějí:

- *1.7** Negace elementárního výroku je elementární výrok
- *1.71** Disjunkce dvou elementárních výroků je elementární výrok

a i o jejich rozvinutí do výroků o elementárních výrokových funkcích bychom mohli uvažovat (viz §49). Pravidlo *1.71 ale neříká, že při spojení dvou elementárních výrokových funkcí obsahujících tutéž proměnnou do disjunkce se zachová identita proměnné. To říká až pravidlo identifikace proměnné

- *1.72** Disjunkce dvou elementárních výrokových funkcí obsahujících tytéž proměnné je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech.

(uvedené v §51). Na rozdíl od pravidla inference nebo zkrácených zápisů, které pravidlo inference zahrnují, používáme pravidla zachování elementárnosti výroků a identifikace proměnné v důkazech zprvu tiše.

O pravidle inference jsme (v §48) řekli, že jeho použití nemůžeme ukázat na příkladech, aniž bychom začali – třeba jen dočasně a pokusně – k nějakým tvrzením přecházet. Jeho použití je nějakým tvrzením.

Mezi výchozími kroky jsou i tvrzení zapsaná umělými výrazy a ta také používáme jako pravidla. Rozdíl mezi dvěma úlohami tvrzení zapsaných umělými výrazy je (podle §45) v tom, že přecházíme-li od tvrzení k jeho instanci, používáme jej jako pravidlo, a přecházíme-li od něj nebo od jeho instancí k dalším tvrzením podle nějakého pravidla, používáme jej jako předpoklad. Například v důkazu tvrzení *2.06

$$\text{*2.06} \quad \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

Důkaz:

$$\begin{array}{ll} \text{*2.04} & \vdash ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \\ & \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad (1) \\ \text{*2.05} & \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (2) \\ (1), (2), \text{*1.11} & \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \end{array}$$

je první řádek zápisem přechodu k instanci výrokové funkce tvrzené v *2.04, a tvrzení *2.04 tu tedy používáme jako pravidlo, druhý řádek tu je jen zopakováním tvrzení *2.05 a třetí řádek je zápisem přechodu k tvrzení zadního členu implikace z prvního řádku, tj. použitím pravidla inference s předchozími dvěma tvrzeními zapsanými umělými výrazy jako předpoklady. Postupujeme tedy tak, že nejprve podle nějakého pravidla tvrdíme nějakou instanci výrokové funkce v něm tvrzené, a toto tvrzení potom použijeme jako předpoklad pro tvrzení další výrokové funkce podle pravidla inference.

Při opakovaném řetězení několika takovýchto přechodů, např. tvrzení vhodné instance výrokové funkce tvrzené v *2.05 a dvou inferencí, tento postup v důkazech zkracujeme. V důkazu tvrzení *2.38

$$\text{*2.38} \quad \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))$$

Důkaz:

$$\begin{array}{ll} \text{*2.06} & \vdash ((q \vee p) \rightarrow (p \vee q)) \\ & \rightarrow (((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (p \vee r))) \quad (1) \\ \text{*1.4} & \vdash (q \vee p) \rightarrow (p \vee q) \quad (2) \\ (1), (2), \text{*1.11} & \vdash ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (p \vee r)) \quad (3) \\ \text{*2.05} & \vdash ((p \vee r) \rightarrow (r \vee p)) \\ & \rightarrow (((q \vee p) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))) \quad (4) \\ \text{*1.4} & \vdash (p \vee r) \rightarrow (r \vee p) \quad (5) \end{array}$$

(4), (5), *1.11	$\vdash ((q \vee p) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))$	(6)
(3), (6), *2.06	$\vdash ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))$	(7)
*1.6	$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$	(8)
(7), (8), *2.05	$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))$	

je devátý řádek zkráceným zápisem

*2.05	$\vdash (((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p)))$ $\rightarrow (((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)))$ $\rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))))$	(9)
(7), (9), *1.11	$\vdash ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)))$ $\rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p)))$	(10)
(10), (8), *1.11	$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))$	

a podobně je tomu se sedmým řádkem. V těchto případech používáme jakoby nové pravidlo

Cokoli (prvního) je implikované tím (druhým), co implikuje něco (třetího), čím je to (první) implikované

kteří je principem sylogismu (*2.05 nebo *2.06) spojeným se dvěma inferencemi. Příslušné tvrzení zapsané umělými výrazy pak používáme v důkazu dvěma různými způsoby: jednou jako pravidlo, podle něž tvrdíme instanci výrokové funkce v něm tvrzené, to bylo na čtvrtém řádku důkazu, a podruhé jako pravidlo, podle něž přejdeme z nějakých předpokladů k dalšímu tvrzení. V rozepsané podobě důkazu jsou ale tato použití stejná: jen na čtvrtém řádku bylo předpokladem jedné inference a na devátém dvou po sobě následujících.

Nepoužíváme-li pravidla zachování elementárnosti výroků a identifikace proměnné tiše, postupujeme v důkazech takto (v celém důkazu tvrzení *2.01 z §55):

*1.2	$\vdash (p \vee p) \rightarrow p$	(1)
*1.7	Výraz $\sim p$ je elementární výroková funkce	(2)
(2), *1.72	Výraz $\sim p \vee \sim p$ je elementární výroková funkce	(3)
(3), *1.7	Výraz $\sim(\sim p \vee \sim p)$ je elementární výroková funkce	(4)

(2), (4), *1.72	Výraz $\sim(\sim p \vee \sim p) \vee \sim p$ je elementární výroková funkce	(5)
(5), *1.01	Výraz $(\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$ je elementární výroková funkce	(6)
(6), (1)	$\vdash (\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$	(7)
(7), *1.01	$\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$	

Použití těchto pravidel je tu, na druhém až pátém řádku, tvrzením výroků o smyslu umělých výrazů; po zkrácení zápisu na šestém řádku pak výsledné tvrzení použijeme jako předpoklad použití tvrzení *1.2, z prvního řádku, jako pravidla. I použití těchto pravidel tedy vychází z nějakých předpokladů, a to z předpokladů o smysluplnosti výrazů, k jejichž tvrzení chceme jako k tvrzení instancí něčeho už tvrzeného přejít.

Přecházíme i k tvrzení výroků nezapsaných umělými výrazy, o nichž mluvíme jako o pravidlech (jeden příklad je v § 56):

***3.03** Konjunkce dvou elementárních výrokových funkcí obsahujících tytéž proměnné, jejichž (těch funkcí) jakékoli hodnoty jsou pravdivé, je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá

Tento přechod předvádíme také jako důkaz:

*1.7	Negace té první je elementární výroková funkce	(1)
*1.7	Negace té druhé je elementární výroková funkce	(2)
(1), (2), *1.72	Disjunkce jejich negací je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech	(3)
(3), *1.7	Její negace je elementární výroková funkce	(4)
(2), (4), *1.72	Disjunkce negace té druhé a v předchozím řádku uvedené negace je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech	(5)

(1), (5), *1.72	Disjunkce negace té první a v předchozím řádku uvedené disjunkce je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech	(6)
(6), *1.01, *3.01	Implikace té první a implikace té druhé a jejich konjunkce je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v uvedených skládaných členech	(7)
*3.2	$\vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$	(8)
(7), (8)	Implikace té první a implikace té druhé a jejich konjunkce je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v uvedených skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá	(9)
(9), *1.11	Implikace té druhé a jejich konjunkce je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v uvedených skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá	(10)
(10), *1.11	Jejich konjunkce je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá	

Tvrzení na prvním až sedmém řádku se týkají smyslu výrazů a tvrzení na osmém až jedenáctém řádku pravdivosti jejich hodnot. Výsledné pravidlo je složením pravidel použitých v důkazu.

Použití tohoto pravidla by vypadalo např.

*2.12	$\vdash p \rightarrow \sim\sim p$	(1)
*2.14	$\vdash \sim\sim p \rightarrow p$	(2)
(1), (2), *3.03	$\vdash (p \rightarrow \sim\sim p) \wedge (\sim\sim p \rightarrow p)$	

a v jakémkoli takovémto případě bychom jej mohli rozepsat pomocí původních pravidel jako

*2.12	$\vdash p \rightarrow \sim\sim p$	(1)
*2.14	$\vdash \sim\sim p \rightarrow p$	(2)
(1), *1.7	$\sim(p \rightarrow \sim\sim p)$ je elementární výroková funkce	(3)
(2), *1.7	$\sim(\sim\sim p \rightarrow p)$ je elementární výroková funkce	(4)
(3), (4), *1.72	$\sim(p \rightarrow \sim\sim p) \vee \sim(\sim\sim p \rightarrow p)$ je elementární výroková funkce obsahující proměnnou p na původních místech v obou skládaných členech	(5)
(5), *1.7	$\sim(\sim(p \rightarrow \sim\sim p) \vee \sim(\sim\sim p \rightarrow p))$ je elementární výroková funkce	(6)
(4), (6), *1.72	$\sim(\sim\sim p \rightarrow p) \vee \sim(\sim(p \rightarrow \sim\sim p) \vee \sim(\sim\sim p \rightarrow p))$ je elementární výroková funkce obsahující proměnnou p na původních místech v obou skládaných členech	(7)
(3), (7), *1.72	$\sim(p \rightarrow \sim\sim p) \vee (\sim(\sim\sim p \rightarrow p) \vee \sim(\sim(p \rightarrow \sim\sim p) \vee \sim(\sim\sim p \rightarrow p)))$ je elementární výroková funkce obsahující proměnnou p na původních místech v obou skládaných členech	(8)
(8), *1.01, *3.01	$(p \rightarrow \sim\sim p) \rightarrow ((\sim\sim p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \sim\sim p) \wedge (\sim\sim p \rightarrow p)))$ je elementární výroková funkce obsahující proměnnou p na původních místech v obou skládaných členech	(9)
(9), *3.2	$\vdash (p \rightarrow \sim\sim p) \rightarrow ((\sim\sim p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \sim\sim p) \wedge (\sim\sim p \rightarrow p)))$	(10)
(1), (10), *1.11	$\vdash (\sim\sim p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \sim\sim p) \wedge (\sim\sim p \rightarrow p))$	(11)
(2), (11), *1.11	$\vdash (p \rightarrow \sim\sim p) \wedge (\sim\sim p \rightarrow p)$	

Rozdíl mezi tvrzením *3.03 jako samostatného kroku a tím, že by šlo jenom o zkrácený zápis opakovaně řetězených přechodů v důkazu, je v tom, že takto patří tvrzený výrok k výčtu myšlenek, jejichž analýzu jsme předvedli.

V druhém stupni analýzy je mezi výchozími kroky pravidlo inference, které je rozšířené i na neelementární výroky a výrokové funkce (jako *9.12 v § 70), a dále pravidla

generalizace,
stejnosti typu,
nahrazování konstant a proměnných.

Pravidlo generalizace zní:

***9.13** Je pravdivá hodnota obecného kvantifikátoru výrokové funkce, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá.

a bereme jej opět jako tvrzení nepodmíněného výroku (viz § 71). Jeho použití je nějakým tvrzením, stejně jako použití pravidla inference. Pravidla stejnosti typu

***9.14** Je-li výraz obsahující proměnnou smysluplný, je smysluplný s konstantou na jejím místě právě tehdy, je-li tato konstanta stejného typu jako tato proměnná.

a nahrazování konstant a proměnných

***9.15** Výraz obsahující nějakou konstantu je výrok právě tehdy, když je to s proměnnou na jejím místě výroková funkce.

jsou tvrzeními výroků o smyslu výrazů (viz §§ 72 a 73). Bereme-li tato pravidla jako podmíněná, je jejich použití jako tvrzení nepodmíněných výroků až výsledkem rozmyšlení. V postupu, kde je nepoužíváme tiše (jehož příklad je v § 77), je zápis kroku podle nich

myšl. negace	Výraz $\sim\varphi x$ je výroková funkce	(1)
...	...	(2)
(1), *9.14	Výraz $\sim\varphi a$ je smysluplný (kde a je konstanta stejného typu jako proměnná x ve výrokové funkci $\sim\varphi x$)	

zkráceným zápisem za

myšl. negace	Výraz $\sim\varphi x$ je výroková funkce	(1)
...	...	(2)
*9.14	Je-li výraz $\sim\varphi x$ smysluplný, je výraz $\sim\varphi a$ (kde a je konstanta stejného typu jako proměnná x ve výrokové funkci $\sim\varphi x$) smysluplný právě tehdy, je-li a stejného typu jako x	(3)

- (1), (3) Výraz $\sim\varphi a$ (kde a je konstanta stejného typu jako proměnná x ve výrokové funkci $\sim\varphi x$) je smysluplný právě tehdy, je-li a stejného typu jako x (4)
- (4) Výraz $\sim\varphi a$ je smysluplný (kde a je konstanta stejného typu jako proměnná x ve výrokové funkci $\sim\varphi x$)

Mohli bychom je ale brát, a případně přeformulovat, i jako nepodmíněné výroky o tom, co stejného typu je a není, co je a není smysluplné, resp. co je výrokem a výrokovou funkcí; a jejich použití by pak bylo přímo tím tvrzením, o které nám jde.

V druhém stupni analýzy používáme opět tvrzení zapsaná umělými výrazy někdy jako pravidla a někdy jako předpoklady. Protože proměnné jsou typově víceznačné (viz § 79), jsou typově víceznačná i pravidla, která je obsahují. Jejich použití tedy buď tuto víceznačnost zachovává, jako např. při přechodu (v důkazu tvrzení *10.24 z § 76)

- *10.1 $\vdash \forall x \sim\varphi x \rightarrow \sim\varphi y$ (1)
 (1), *2.03 $\vdash \varphi y \rightarrow \sim\forall x \sim\varphi x$

nebo při něm proměnné typově omezujeme, jak by to bylo např. při přechodu

- *10.1 $\vdash \forall x \sim\varphi x \rightarrow \sim\varphi y$ (1)
 (1) $\vdash \forall x \sim x \text{ jde do školy} \rightarrow \sim y \text{ jde do školy}$

Shrneme-li to: v našem postupu pravidla používáme tak, že každý krok v důkazech je podle nějakého pravidla. Pravidla ale nejsou předpisy nebo popisy předělávání jedněch umělých výrazů na jiné.

§91

Mohli bychom mít ale dojem, že naše pravidla nezapsaná umělými výrazy máme brát jako podmíněné výroky o umělých výrazech a jejich tvrzeních. Např. důkaz tvrzení *10.2 (z § 76, v němž ale použijeme výslovně pravidlo *10.13)

*10.1	$\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$	(1)
(1), *1.6	$\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y)$	(2)
(2), *9.13	$\vdash \forall y ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$	(3)
(3), 10.12, *1.01	$\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)$	(4)
*10.12	$\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	(5)
(4), (5), *10.13, *4.01	$\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	

je zkráceným zápisem důkazu

*10.1	$\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$	(1)
*1.6	$\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$	(2)
(1), (2), *9.12	$\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y)$	(3)
(3), *9.13	$\vdash \forall y ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$	(4)
(4), *1.01	$\vdash \forall y (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee (p \vee \varphi y))$	(5)
*10.12	$\vdash \forall y (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee (p \vee \varphi y))$ $\rightarrow (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee \forall y (p \vee \varphi y))$	(6)
(5), (6), *9.12	$\vdash \sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee \forall y (p \vee \varphi y)$	(7)
(7), *1.01	$\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)$	(8)
*10.12	$\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	(9)
(8), (9), *10.13	$\vdash ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)) \wedge (\forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x))$	(10)
(10), *4.01	$\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	

kde k třetímu a sedmému řádku přecházíme podle pravidla inference (*9.12), které bychom brali jako tvrzení výroku¹⁶

***9.12a** Máme-li už „ $\vdash \varphi x$ “ a „ $\vdash \varphi x \rightarrow \psi x$ “, budeme mít i „ $\vdash \psi x$ “

k čtvrtému řádku přecházíme podle pravidla generalizace (*9.13), které bychom brali jako

***9.13a** Máme-li už „ $\vdash \varphi x$ “, budeme mít i „ $\vdash \forall x \varphi x$ “

a k desátému řádku podle pravidla *10.13, které bychom brali jako

¹⁶ Použijeme znak „a“ za číslem upraveného kroku ke zdůraznění, že se jedná o jeho alternativní podobu.

***10.13a** Máme-li už „ $\vdash \varphi x$ “ a „ $\vdash \psi x$ “ a obsahují-li výrokové funkce φx a ψx proměnné stejného typu, budeme mít i „ $\vdash \varphi x \wedge \psi x$ “

a svůj postup bychom přerýkali slovy

Na první řádce máme „ $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ “ a na druhém „ $\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$ “, a máme-li tato dvě tvrzení, podle pravidla *9.12a budeme mít i „ $\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y)$ “

a podobně bychom přerýkali i přechod z pátého a šestého řádku na sedmý; dále bychom řekli

Na třetím řádce pak máme „ $\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y)$ “, a máme-li toto tvrzení, podle pravidla *9.13a budeme mít i „ $\vdash \forall y ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$ “

a

Na osmém řádce máme „ $\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)$ “ a na devátém „ $\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$ “, a máme-li tato dvě tvrzení, podle pravidla *10.13a budeme mít za tichého předpokladu, že v nich tvrzené výrokové funkce obsahují proměnné stejného typu, i „ $\vdash ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)) \wedge (\forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x))$ “

Toto jsou pravdivé výroky o našem důkazu. My bychom je ale nebrali jako kroky v důkazu, ale jako jeho popisy nebo předpisy: buď bychom se dívali, zda to tak je, nebo bychom podle něj přidali další řádek, aby to tak bylo.

Připadalo by nám, že o přechodech k řádkům (3), (4), (7) a (10) je řeč v našich pravidlech. Mohlo by nám pak také připadat, že podobně by měla být v pravidlech řeč i o přechodech k ostatním řádkům. První a devátý řádek jsou zápisy výchozích tvrzení, a o jejich použití v důkazech by pojednávalo pravidlo

***VT** Je-li „ $\vdash \varphi x$ “ výchozí tvrzení, budeme mít „ $\vdash \varphi x$ “

a přechod podle něj bychom přeříkali

„ $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ “ je výchozí tvrzení, a podle pravidla *VT budeme mít
 „ $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ “

resp. podobně v případě devátého řádku. Druhý a šestý řádek jsou zápisy tvrzení instancí už tvrzených výrokových funkcí, a o přechodu k tvrzení instancí by pojednávalo pravidlo¹⁷

***INST** Máme-li už „ $\vdash \varphi x$ “ a je-li výroková funkce ψx instancí výrokové funkce φx , budeme mít i „ $\vdash \psi x$ “

a přechod podle něj bychom přeříkali

Máme „ $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$ “, a máme-li toto tvrzení, podle pravidla *ISNT budeme mít za tichého předpokladu, že $(\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$ je instancí této výrokové funkce, i „ $(\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$ “

resp. podobně v případě šestého řádku. Zbývá pátý, osmý a desátý řádek: to jsou výsledky rozpisu zkratk nebo zkrácení podle definic, o přechodu k nim by pojednávalo pravidlo

***DEF** Máme-li už „ $\vdash \varphi x$ “ a je-li výroková funkce ψx definičním zkrácením nebo rozpisem výrokové funkce φx , budeme mít i „ $\vdash \psi x$ “

a přechod podle něj bychom přeříkali

Na čtvrtém řádku máme „ $\vdash \forall y ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$ “, a máme-li toto tvrzení, podle pravidla *DEF budeme mít za tichého předpokladu, že $\forall y (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee (p \vee \varphi y))$ je definičním rozpisem této výrokové funkce, i „ $\vdash \forall y (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee (p \vee \varphi y))$ “

17 O „pravidle substituce“ viz např. Church, A., *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, 1956, s. 72 pro výrokovou logiku a s. 218 pro predikátovou logiku prvního řádu. Podobné pravidlo je i v Gödel, K., „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls“, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, 1930, 2, s. 350.

resp. podobně v dalších případech. Teď bychom mohli důkaz přepsat tak, aby na začátku každého řádku bylo napsané, jaké pravidlo o příslušném přechodu pojednává:

*10.1, *VT	$\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$	(1)
*1.6, *INST	$\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$	(2)
(1), (2), *9.12a	$\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y)$	(3)
(3), *9.13a	$\vdash \forall y ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$	(4)
(4), *1.01, *DEF	$\vdash \forall y (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee (p \vee \varphi y))$	(5)
*10.12, *INST	$\vdash \forall y (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee (p \vee \varphi y))$	
	$\rightarrow (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee \forall y (p \vee \varphi y))$	(6)
(5), (6), *9.12a	$\vdash \sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee \forall y (p \vee \varphi y)$	(7)
(7), *1.01, *DEF	$\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)$	(8)
*10.12, *VT	$\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	(9)
(8), (9), *10.13a	$\vdash ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)) \wedge (\forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x))$	
	$\rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	(10)
(10), *4.01, *DEF	$\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$	

a k důkazu bychom připojili několik tichých předpokladů:

Výroková funkce $(\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$ je instancí výrokové funkce $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$
Výroková funkce $\forall y (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee (p \vee \varphi y))$ je definičním rozpisem výrokové funkce $\forall y ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$
Výroková funkce $\forall y (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee (p \vee \varphi y)) \rightarrow (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee \forall y (p \vee \varphi y))$ je instancí výrokové funkce $\forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$
Výroková funkce $(p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)$ je definiční zkratkou výrokové funkce $\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee \forall y (p \vee \varphi y)$
Výrokové funkce $(p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)$ a $\forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$ obsahují proměnné stejného typu
Výroková funkce $\forall x (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$ je definiční zkratkou výrokové funkce $((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)) \wedge (\forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x))$

Tyto předpoklady bychom ale mohli v důkazu výslovně uvést.

Pod tímto dojmem by nám tedy v naší analýze chyběla pravidla

použití výchozích tvrzení,

instanciace,
nahrazení podle definice,

(příčemž první dvě bychom mohli spojit do jednoho, kdybychom brali výrokovou funkci jako její vlastní instanci).

§ 92

Mohli bychom mít dále dojem, že označení výrazu za instanci něčeho vyžaduje další pravidlo, které by pojednávalo o dosazování. Znělo by nějak takto:

***DOS** Výraz je instancí výrokové funkce, právě když vznikne dosazením takového výrazu za všechny výskyty proměnné v dané výrokové funkci, který je smysluplně hodnotu této proměnné (je-li to výrok nebo individuum), nebo jehož hodnoty jsou smysluplně hodnotami této proměnné (je-li to výroková funkce), a v němž není žádná proměnná, která by se po dosazení nově stala vázanou

Vidíme např., že výraz

$$\forall y (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee (p \vee \varphi y)) \rightarrow (\sim(p \vee \forall x \varphi x) \vee \forall y (p \vee \varphi y))$$

je instancí výrokové funkce tvrzené v *10.12

$$\forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$$

resp.

$$\forall y (p \vee \varphi y) \rightarrow (p \vee \forall y \varphi y)$$

a vznikl dosazením $\sim(p \vee \forall x \varphi x)$ za p a $p \vee \varphi y$ za φy ; aby se proměnná x v dosazovaném výrazu nestala vázanou ve dvou vnořených kvantifikátorech, přejmenovali jsme nejprve tu vnější na y . Kdybychom za p dosadili

výraz, který by kvantifikovanou proměnnou obsahoval a ona by se nově stala vázanou, např. φx , vznikl by výraz

$$\forall x (\varphi x \vee \varphi x) \rightarrow (\varphi x \vee \forall x \varphi x)$$

který není instancí původního výrazu. Mohlo by nám proto připadat, že nemáme-li to dostatečně zajištěno nějakým pravidlem jako *DOS, k tvrzení *10.12 bychom měli přidat podmínku, že za p nesmíme dosadit nic, co obsahuje proměnnou x :

***10.12a** Jestliže p neobsahuje x , pak $\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$

což je pravdivý výrok, stejně jako výrok tvrzený v *DOS.

§ 93

Potom bychom mohli mít dojem, že takovouto sadu pravidel, nebo nějakou sadu ještě propracovanější, používáme k popisu nebo předpisu rozvíjení dalších tvrzení z výchozích bez ohledu na to, jaká výchozí tvrzení zvolíme. Mohli bychom zkoušet přidávat nebo ubírat různá výchozí tvrzení výrokových funkcí zapsaných umělými výrazy a sledovat, k jakým tvrzením a jak snadno dojdeme. Dělali bychom tak dočasné nebo pokusné přechody (o nichž byla řeč v § 48); kdybychom např. měli jako výchozí jenom

***1a** $\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

***2a** $\vdash p \rightarrow p$

uměli bychom přejít k

$$\vdash p \vee \sim p$$

Důkaz:

*1a, *INST $\vdash (\sim p \vee p) \rightarrow (p \vee \sim p)$ (1)

*2a, *DEF $\vdash \sim p \vee p$ (2)

(1), (2), *9.12a $\vdash p \vee \sim p$

tedy: z uvedených dvou výchozích tvrzení bychom pomocí pravidel instance, definičního nahrazení a inference přešli k dalšímu tvrzení.

Připadalo by nám, že ani nemusíme žádné výrokové funkce jako výchozí tvrdit, protože o nich umíme mluvit podmíněně. Řekli bychom:

Kdybychom měli „ $\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ “ a „ $\vdash p \rightarrow p$ “ jako výchozí tvrzení, měli bychom i „ $\vdash p \vee \sim p$ “

To je pravdivý výrok o tom, co by šlo dělat s naší sadou pravidel, a je složením v důkazu uvedených pravidel.

Pod dojmem toho, že takto popisujeme nebo předpisujeme důkazy, by nám připadalo, že tvrzení a inference ani nemusíme dělat.

§94

Nebo bychom mohli mít dojem, že se naše pravidla vůbec netýkají tvrzení, ale jen výrazů a jejich vztahů. Naše výchozí tvrzení zapsaná umělými výrazy bychom brali jako schémata axiomů, tj. např.

***1.4** $\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

bychom brali jako

***1.4b** Jakákoli instance výrokové funkce $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ je axiom

nebo (jak bychom dnes řekli)

***1.4b** Jakýkoli výraz tvaru $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ je axiom

a naše tvrzení, k nimž přecházíme, jako schémata výrazů odvoditelných podle dané sady pravidel z axiomů, tj. např.

***2.08** $\vdash p \rightarrow p$

jako

***2.08b** Jakýkoli výraz tvaru $p \rightarrow p$ je odvoditelný podle dané sady pravidel z axiomů

Např. pravidlo inference bychom pak brali jako

***9.12b** Jsou-li výrazy tvaru φx a $\varphi x \rightarrow \psi x$ axiomy, nebo jsou-li už odvoditelné podle dané sady pravidel z axiomů, je tak odvoditelný i výraz tvaru ψx

a pravidlo *10.13 jako

***10.13b** Jsou-li výrazy tvaru φx a ψx axiomy, nebo jsou-li už odvoditelné podle dané sady pravidel z axiomů, a obsahují-li proměnné stejného typu, je tak odvoditelný i výraz tvaru $\varphi x \wedge \psi x$

... atd.

§95

K tomu by se mohl přidat dojem, že naše pravidla máme brát jako výroky jenom o umělých výrazech. Samotné pravidlo, např.

***9.12** Cokoli implikovaného pravdivým předpokladem je pravdivé

je sice tvrzení výroku, ale připadalo by nám, že ten nepatří k výrazům, jichž se týká. Kdyby měl být tento výrok hodnotou proměnné p např. v tvrzení

***2.08** $\vdash p \rightarrow p$

z něhož bychom přešli k instanci

***2.08** $\vdash$ Cokoli implikovaného pravdivým předpokladem je pravdivé $\rightarrow$ Cokoli implikovaného pravdivým předpokladem je pravdivé

připadalo by nám to nepatřičné nikoliv z důvodu typové víceznačnosti, ale protože bychom to považovali za míchání našich výrazů s těmi, jichž se týkají. Ani naše dosavadní umělé výrazy jako

$$\varphi x \wedge \psi x$$

by nepatřily k těmto zvláštním umělým výrazům, protože bychom je brali jen jako jejich tvary (mluvili bychom o „výrazech tvaru $\varphi x \wedge \psi x$ “). Naše příklady jako

Petr jde do školy
~ Petr jde do školy

bychom potom brali jako umělé výrazy jenom připomínající výroky běžné řeči, z nichž pocházejí.

Pod tímto dojmem by nám připadalo, že popisujeme umělý jazyk (dnes bychom řekli „jazyk–objekt“).

§ 96

Podívejme se, co se o pravidlech dočteme v *Principia Mathematica*:

Jakýkoli výrok může být buď tvrzený, nebo jen uvažovaný. Říkám-li „César umřel“, tvrdím výrok „César umřel“, když ale říkám „César umřel“ je výrok, tvrdím něco jiného, a výrok „César umřel“ už není tvrzený, ale jen uvažovaný. Podobně v podmíněném výroku, např. „je-li $a = b$, pak $b = a$ “, máme dva netvrzené výroky, a to „ $a = b$ “ a „ $b = a$ “, zatímco tvrzené je to, že ten první z nich implikuje ten druhý.¹⁸

18 PM, s. 92: *Any proposition may be either asserted or merely considered. If I say „Caesar died“, I assert the proposition „Caesar died“, if I say „Caesar died“ is a proposition, I make a different assertion, and „Caesar died“ is no longer asserted, but merely considered. Similarly in a hypothetical proposition, e.g. „if $a = b$, then $b = a$ “, we have two unasserted propositions, namely „ $a = b$ “ and „ $b = a$ “, while what is asserted is that the first of these implies the second.*

To se vztahuje na naše pravidla: zatímco jejich části tvrzené nejsou, ona sama ano. Např. v pravidle

$$*1.4 \quad \vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$$

netvrdíme výrokovou funkci $(p \vee q)$, ani $(q \vee p)$, ale ani netvrdíme, že tvrdíme výrokovou funkci $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$, tvrdíme tuto funkci samu. Naše pravidla tedy nejsou jenom výroky o výrazech, ale tvrzeními výrazů.

Na začátku kapitoly *2 najdeme tuto úvahu:¹⁹

*Důkazy prvních výroků z této kapitoly sestávají jednoduše z povšimnutí, že jsou instancemi obecných pravidel daných v kapitole *1. V takových případech nejsou tato pravidla předpoklady, protože tvrdí jakoukoli svou instanci a ne něco jiného než své instance [...] Rozpoznání, že určitý výrok je instancí nějakého obecného výroku dříve dokázaného nebo předpokládaného, je pro proces dedukce z obecných pravidel podstatné, ale samo nemůže být ustaveno jako obecné pravidlo, protože jeho požadované použití je vždy jednotlivé a žádné obecné pravidlo nemůže explicitně zahrnovat jednotlivé použití.²⁰*

O všech našich tvrzeních se tu mluví jako o pravidlech. Nejen, že nám nechybí pravidlo instanciace, protože co chceme tvrdit, už tvrdíme, ale jeho nabízející se formulace by stejně při svém užití přechod k instanci vyžadovaly. Abychom přešli od

$$*1.6 \quad \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \quad (1)$$

k

$$*1.6, *INST \quad \vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$$

¹⁹ Tedy na místě v PM, kde začíná dokazování.

²⁰ PM, s. 98: *The proofs of the earlier of the propositions of this number consist simply in noticing that they are instances of the general rules given in *1. In such cases, these rules are not premisses, since they assert any instance of themselves, not something other than their instances [...] The recognition that a certain proposition is an instance of some general proposition previously proved or assumed is essential to the process of deduction from general rules, but cannot itself be erected into a general rule, since the application required is particular, and no general rule can explicitly include a particular application.*

potřebovali bychom instanci pravidla *INST

Máme-li už „ $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$ “ a je-li výroková funkce $(\forall x \varphi x \rightarrow \psi) \rightarrow ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \psi))$ instancí výrokové funkce $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$, budeme mít i „ $\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \psi) \rightarrow ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \psi))$ “

a k tomu musíme udělat to, co jsme měli udělat rovnou. Z této úvahy je ale také vidět, že nepovažujeme pravidla za něco zcela jiného než tvrzené výroky. Není to tak, že být instancí je vztahem mezi umělými výrazy a ostatních pravidel se netýká.

Dále se podívejme na komentář k pravidlu inference

Není to stejné jako „je-li p pravdivý, pak je-li q implikovaný p, q je pravdivý“. To je pravdivý výrok, ale platí právě tak, je-li p nepravdivý nebo není-li q implikovaný p. Na rozdíl od našeho principu neumožňuje tvrdit q prostě, bez jakékoli hypotézy. Nemůžeme tento princip vyjádřit symbolicky, kromě jiného protože jakýkoli symbolismus s proměnnou p poskytne jenom hypotézu, že p je pravdivý, ale ne fakt, že je pravdivý.²¹

v němž je přímo řečeno, že toto pravidlo není podmíněný výrok. I když by příslušný podmíněný výrok byl pravdivý, my tu tvrdíme nepodmíněně zadní člen jakékoli tvrzené implikace, jejíž přední člen tvrdíme. Nabízející se představa do nekonečna se kupících podmíněných výroků z Carrollova paradoxu²² také ukazuje, že naše tvrzené pravidlo inference patří k důkazu stejně jako to, co podle něj tvrdíme.

Naše pravidla tedy nejsou jen podmíněnými výroky o umělých výrazech.

²¹ Tamtéž, s. 94: *It is not the same as „if p is true, then if p implies q, q is true“. This is a true proposition, but it holds equally when p is not true and when p does not imply q. It does not, like the principle we are concerned with, enable us to assert q simply, without any hypothesis. We cannot express the principle symbolically, partly because any symbolism in which p is variable only gives the hypothesis that p is true, not the fact that it is true.*

²² Viz Russell, B., *Principles of Mathematics*, London, Routledge 2010 (původní vydání 1903), § 38, s. 36, kde je diskuse Carrollova paradoxu.

§97

Dojem, že naše pravidla jsou podmíněnými výroky o umělých výrazech a jejich tvrzeních, resp. o předělávání jedněch na jiné, je zavádějící, protože i když bychom takové podmíněné výroky tvrdit mohli, pravidla používáme jinak: tvrdíme i samotné výrazy a některá naše tvrzení jsou nepodmíněná.

Proto je zavádějící i dojem, že nám některá taková pravidla chybí. Nepotřebujeme totiž pravidla k tomu, abychom každý krok v důkazu popsali nebo předepsali, ale k tomu, aby byl každý krok v důkazu předvedený jako jednotlivý případ nějakého předchozího nebo výchozího kroku.

Dojem, že na volbě výchozích tvrzení nezáleží a naše pravidla stojí mimo tato tvrzení, je zavádějící, protože právě pravidla jsou tím, co tvrdíme. A právě naše výchozí tvrzení jsou tím, z čeho jsme se rozhodli vyjít.

A dojem, že naše pravidla pojednávají jen o výrazech a jejich vztazích, případně dokonce jen o umělých výrazech a jejich vztazích, je zavádějící, protože nám nejde o popis umělého jazyka, ale o předvedení myšlenek a postupů důkazů.

§98

Třetí otázka, kterou si položíme, je: jaký je rozdíl mezi výrokovými funkcemi a výrazy pro ně? Samotné výrokové funkce bychom tu považovali za něco jiného, než jsou výrazy pro ně; např. umělý výraz

$$p \vee q$$

bychom považovali za něco jiného, než výrokovou funkci disjunkce, pro níž je to výraz. Ptali bychom se totiž:

Je to výraz pro výrokovou funkci?

Má smysl?

... atd.

což jsou jiné otázky, než

Jak je to s pravdivostí hodnot této výrokové funkce?

Jaké jsou její instance?

... atd.

§ 99

V našem postupu (od §§ 4 až 8) jsou umělé výrazy používané pro jednoduchost svého smyslu, pro snadnost opakovaného skládání spojeného s podobou zápisu a pro svou stručnost a přehlednost, ale jinak to jsou výrazy jako jakékoli jiné. Některé z nich jsou výrokovými funkcemi, tj. (podle § 13) výrazy obsahujícími nějaké proměnné, z nichž by se po udělení nějakých hodnot těmto proměnným staly výroky.

Mezi výchozími myšlenkami našeho postupu je (v § 36) myšlenka disjunkce jako myšlenka výrokové funkce, tedy výrazu, který zapisujeme

$$p \vee q$$

a myšlenka negace jako myšlenka výrokové funkce, tedy výrazu, který zapisujeme

$$\sim p$$

Z toho vidíme, že tyto umělé výrazy jsou tím, co ve svých výchozích myšlenkách myslíme.

Výrazy, které jsou hodnotami těchto výrokových funkcí, jako např.

Petr jde do školy $\vee$ Petr nese knihu Michalovi
 $\sim$ Petr jde do školy

jsou elementárními výroky, neobsahují-li žádné proměnné (viz § 37). Výrazy, které proměnné obsahují, např.

Petr jde do školy $\vee p$

bereme někdy jako výrokové funkce a někdy jako jejich proměnné hodnoty, tedy jako výroky (viz § 38). To závisí na tom, jak tyto výrazy myslíme, zda jako obsahující proměnnou, nebo jako obsahující její hodnotu.

O výrazech říkáme, že jsou instancemi výrokové funkce, když ony samy nebo všechny jejich hodnoty jsou i hodnotami té výrokové funkce. Např.

Petr jde do školy $\vee p$
 Petr jde do školy $\vee$ Petr nese knihu Michalovi

jsou oba instancemi disjunkce a přecházíme k nim (v §40) dosazováním dalších výrazů za proměnné. Tyto výrazy tedy nebereme jenom jako hodnoty příslušné výrokové funkce, ale i jako její instance, tj. zvláštní případy. Jsou to výrazy jako ona sama, jen jsou v nějakém ohledu podrobněji rozvedené, např.

Petr jde do školy v p

už není jakákoli disjunkce, ale jen taková, která má na místě předního členu výrok „Petr jde do školy“. Původní disjunkcí jsme mysleli tuto výrokovou funkci i takové výrokové funkce, které mají na místě předního členu něco jiného.

V druhém stupni analýzy je mezi našimi výchozími myšlenkami (v §58) myšlenka obecného kvantifikátoru jako výrokové funkce, tedy výrazu, který zapisujeme

$\forall x \varphi x$

a myšlenka individuí jako výrazů, které nejsou samy ani výroky, ani výrokovými funkcemi. I v tomto stupni analýzy jsou výrazy tím, co myslíme.

Výrazy obsahující proměnné výroky, proměnné výrokové funkce a proměnná individua bereme opět někdy jako výrokové funkce těchto proměnných, a někdy jako jejich hodnoty; případně to děláme různě u různých proměnných. Např. výraz

φx

bereme někdy jako výrok, někdy jako výrokovou funkci proměnné x , někdy jako výrokovou funkci proměnné φ , a někdy jako výrokovou funkci dvou proměnných x a φ (viz §§59 až 61). Navíc je tento výraz typově víceznačný (viz §79): jak proměnnou x , tak proměnnou φ bereme v různých případech jako proměnné různých typů. Proměnnou x bereme jako proměnný výrok, a to ještě elementární nebo různým způsobem neelementární, proměnné individuum, nebo proměnnou výrokovou funkci, a tu ještě různou podle toho, jakého typu jsou její proměnné a zda a jakým způsobem je neelementární; proměnnou φ bereme jako proměnnou výrokovou funkci proměnné x , ale ještě záleží na tom, jaké další proměnné obsahuje. Jeden výraz tedy myslíme různě a podle toho pak jiné výrazy bereme jako jeho instance

nebo ne. Bereme-li např. x jako proměnné individuum a φ jako proměnnou elementární výrokovou funkci, pak výrok

Petr jde do školy

je instancí výrokové funkce φx , ale bereme-li je jinak, pak ne.

Tyto výrazy potom postupně tvrdíme jako výchozí kroky, nebo k nim z výchozích tvrzení přecházíme.

Někdy ale netvrdíme samotné výrazy, ale něco o nich. V definicích (v §42) zavádíme zkratky

- *1.01** $p \rightarrow q$ je zkratka za $\sim p \vee q$
- *3.01** $p \wedge q$ je zkratka za $\sim(\sim p \vee \sim q)$
- *4.01** $p \leftrightarrow q$ je zkratka za $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

a jim rozumíme tak, že první výraz bude mít stejný smysl jako druhý, ale bude stručnější a přehlednější, protože celou složenou výrokovou funkci zapíšeme jako jednoduchou. Zavádíme tedy zkrácené výrazy za to, co myslíme jako složené, abychom od této složenosti podle potřeby odhlíželi.

Ve výchozích tvrzeních

- *1.7** Negace elementárního výroku je elementární výrok
- *1.71** Disjunkce dvou elementárních výroků je elementární výrok

říkáme, že hodnoty výrokových funkcí negace a disjunkce jsou elementárními výroky, tj. že tyto výrokové funkce jsou elementární (viz §49). To pak vztahujeme i na jejich jakékoli složení. O takových výrazech tedy tvrdíme, že jsou elementární.

Ve výchozím tvrzení

- *1.72** Disjunkce dvou elementárních výrokových funkcí obsahujících tytéž proměnné je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech.

pak říkáme, že při spojení do disjunkce zachováváme identitu proměnných. Opět tedy tvrdíme něco o výrazech, resp. o tom, jak tyto výrazy myslíme. Zvláštní případy těchto tvrzení potom používáme v důkazech,

v nichž výslovně použití pravidel *1.7, *1.71 a *1.72 uvádíme, např. v důkazu tvrzení *2.01

*1.2	$\vdash (p \vee p) \rightarrow p$	(1)
*1.7	Výraz $\sim p$ je elementární výroková funkce	(2)
(2), *1.72	Výraz $\sim p \vee \sim p$ je elementární výroková funkce	(3)
(3), *1.7	Výraz $\sim(\sim p \vee \sim p)$ je elementární výroková funkce	(4)
(2), (4), *1.72	Výraz $\sim(\sim p \vee \sim p) \vee \sim p$ je elementární výroková funkce	(5)
(5), *1.01	Výraz $(\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$ je elementární výroková funkce	(6)
(6), (1)	$\vdash (\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$	(7)
(7), *1.01	$\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$	

po tvrzení *1.2 nejprve postupně dokážeme, že $(\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$ je elementární výroková funkce, a až potom ji tvrdíme jako instanci výrokové funkce tvrzené v *1.2.

Podobně ve formulaci i v důkazu pravidla *3.03 (v § 56) říkáme něco o výrazech. Netvrdíme je jenom, ale tvrdíme navíc o nich, že obsahují identifikované proměnné:

***3.03** Konjunkce dvou elementárních výrokových funkcí obsahujících tytéž proměnné, jejichž (těch funkcí) jakékoli hodnoty jsou pravdivé, je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech, jejíž jakákoli hodnota je pravdivá

a v důkazu:

*1.7	Negace té první je elementární výroková funkce	(1)
*1.7	Negace té druhé je elementární výroková funkce	(2)
(1), (2), *1.72	Disjunkce jejich negací je elementární výroková funkce obsahující tytéž proměnné	

na původních místech v obou skládaných
členech (3)

... atd.

Vidíme tedy, že k myšlení výrazů patří jak jejich kladení, tak myšlení toho, jak je myslíme.

V druhém stupni analýzy zavádíme další zkratku za složení výrokových funkcí

***10.01** $\exists x \varphi x$ je zkratka za $\sim \forall x \sim \varphi x$

a tím opět říkáme, že tyto výrazy budou mít stejný smysl, přestože jsou různé (viz §65). Další definice (v §67) zkracuje přímo výroky o tom, jaké jsou výrazy, resp. výroky o jejich smyslu:

***9.131** To, že dva výrazy jsou stejného typu, je zkratka za to, že jsou oba individua, že jsou oba elementární výroky obsahující jedno individuum, že jsou oba elementární výrokové funkce jednoho individua, že jsou oba elementární výroky obsahující dvě individua, že jsou oba elementární výrokové funkce jednoho individua obsahující ještě jedno konstantní individuum, že jsou oba elementární výrokové funkce dvou individuí... atd., tj. že jsou oba elementární výroky nebo elementární výrokové funkce a obsahují stejné počty výrazů stejných typů; a pokud to jsou neelementární výroky nebo neelementární výrokové funkce, že jsou oba navíc neelementární ve stejném smyslu, tj. že jsou oba výroky obsahující jedno vázané proměnné individuum, že jsou oba výrokové funkce obsahující jedno vázané proměnné a jedno volné proměnné individuum... atd., že jsou oba výroky obsahující jednu vázanou proměnnou stejného typu... atd.

Nejen tedy, že o výrazech něco tvrdíme, ale těmto svým tvrzením věnujeme takovou pozornost, že si příslušné výrazy o výrazech zkracujeme. Např. výrok

Proměnné x a y jsou stejného typu

je zkrácený výraz za celý dlouhý a induktivní výraz uvedený v definici vztažený na tyto proměnné. Tomuto výroku rozumíme jako výroku o tom, jak myslíme tyto proměnné.

V tomto stupni analýzy potom vycházíme ze dvou dalších tvrzení o výrazech. První z nich (v § 72) je

- *9.14** Je-li výraz obsahující proměnnou smysluplný, je smysluplný s konstantou na jejím místě právě tehdy, je-li tato konstanta stejného typu jako tato proměnná

a druhé (v § 73)

- *9.15** Výraz obsahující nějakou konstantu je výrok právě tehdy, když je to s proměnnou na jejím místě výroková funkce

Jejich zvláštní případy tvrdíme v důkazech, v nichž výslovně použití těchto pravidel uvádíme, např. v důkazu tvrzení *10.22 (jehož část je v § 77):

myšl. negace	Výraz $\sim\varphi x$ je výroková funkce	(1)
myšl. negace	Výraz $\sim\psi x$ je výroková funkce	(2)
(1), *9.14	Výraz $\sim\varphi a$ je smysluplný (kde a je konstanta stejného typu jako proměnná x ve výrokové funkci $\sim\varphi x$)	(3)
předpoklad	Proměnná x ve výrokové funkci $\sim\varphi x$ je stejného typu jako proměnná x ve výrokové funkci $\sim\psi x$	(4)
(2), (4), *9.14	Výraz $\sim\psi a$ je smysluplný	(5)
(3), (5), myšl. disjunkce	Výraz $\sim\varphi a \vee \sim\psi a$ je výrok	(6)
(6), myšl. negace	Výraz $\sim(\sim\varphi a \vee \sim\psi a)$ je výrok	(7)
(7), *9.15	Výraz $\sim(\sim\varphi x \vee \sim\psi x)$ je výroková funkce	(8)
... atd.		

Výrok o výrazech je také tvrzený v pravidle *10.13

- *10.13** Obsahují-li dvě výrokové funkce proměnné stejného typu a jsou-li jakékoli jejich hodnoty (těchto funkcí) pravdivé, jakákoli hodnota jejich konjunkce obsahující tytéž proměnné na původních místech v obou skládaných členech je pravdivá.

které je obdobou *3.03, a v jeho důkazu.

V našem postupu tedy výrokové funkce tvrdíme jako výrazy, zkracujeme je a tvrdíme i výroky o nich, a i tyto výrazy dále zkracujeme. Tímto způsobem výrazy myslíme.

§100

Mohli bychom ale mít dojem, že je-li něco výroková funkce, není to výrok. Výraz buď obsahuje volnou proměnnou, nebo ne. Nejprve bychom tím mínili rozdíl mezi výrazy

$$p \vee q$$

a

Petr jde do školy $\vee$ Petr nese knihu Michalovi

z nichž ten první volné proměnné obsahuje a druhý ne. Následně bychom ovšem chtěli rozlišit, kdy ten první bereme jako výrokovou funkci, a kdy jej bereme jako její hodnotu, resp. kdy bereme které proměnné jako obsažené proměnné a kdy jako hodnoty. Připadalo by nám, že jsou to různé výrazy. A abychom je rozlišili, zapisovali bychom je různě, např. pomocí stříšky nad proměnnou²³ v případě, že ji bereme jako obsaženou proměnnou:

$$\hat{p} \vee \hat{q}$$

by byl výraz obsahující dvě volné proměnné, zatímco $p \vee q$ by byl výraz obsahující jednu volnou proměnnou (v tomto případě q) a $\hat{p} \vee q$ by byl výraz obsahující jednu volnou proměnnou (v tomto případě p), a $p \vee q$ by byl výraz vůbec neobsahující volné proměnné, jen jejich hodnoty, tedy výrok.

Také bychom chtěli rozlišit, kdy bereme tyto proměnné jako proměnné elementární výroky a jaké, a kdy jako proměnné neelementární výroky a jakým způsobem neelementární... atd. Jinými slovy: chtěli bychom odstranit typovou víceznačnost našich výrazů. Opět bychom je zapisovali

23 Toto značení přebíráme z PM.

různě, např. pomocí horních indexů²⁴, které by byly výčtem typů konstant a vázaných proměnných obsažených ve výroku:

$$p^{[jedno\ konstantní\ individuum]}$$

by byl elementární výrok obsahující jedno konstantní individuum, zatímco třeba

$$p^{[jedno\ vázané\ proměnné\ individuum]}$$

by byl neelementární výrok obsahující vázané proměnné individuum a

$$p^{[jedno\ konstantní\ individuum,\ jedna\ vázaná\ proměnná\ elementární\ výroková\ funkce\ jednoho\ individua]}$$

by byl neelementární výrok obsahující jedno konstantní individuum a jednu vázanou proměnnou elementární výrokovou funkci jednoho individua... atd. Všechna naše typově víceznačná tvrzení by teď měla tolik podob, kolika různými způsoby bychom je zapsali. Např.

$$\vdash p^{[jedno\ konstantní\ individuum]} \vee \sim p^{[jedno\ konstantní\ individuum]}$$

by teď bylo jiné tvrzení, než

$$\vdash p^{[jedno\ vázané\ proměnné\ individuum]} \vee \sim p^{[jedno\ vázané\ proměnné\ individuum]}$$

a chtěli bychom v nich pak odlišit i zápisy disjunkce a negace, protože by to byly různé výrokové funkce.

Podobně bychom chtěli odstranit víceznačnost ze zápisu

$$\varphi x$$

protože jak φ , tak x bereme v různých případech různě: jednak někdy jako obsažené proměnné a někdy jako jejich hodnoty, jednak typově víceznačně.

²⁴ V dnešní teorii typů je podobné značení typů pomocí horních indexů běžné. Viz např. Kamareddine, F., Laan, T., Nederpelt, R., cit. d., s. 216, nebo Landini, G., *Russell's Hidden Substitutional Theory*, Oxford: OUP 1998, s. 256.

Připadalo by nám tedy, že dosud jsme různé výrazy zapisovali stejně, a nyní je už zapisujeme každý jinak.

§ 101

K tomu se může přidat dojem, že říkáme-li něco o výrazech, např.

Výraz $\sim\varphi x \vee \varphi x$ je výroková funkce

nebo

a je konstanta stejného typu jako proměnná x

jsou použité umělé výrazy, tj. $\sim\varphi x \vee \varphi x$, a a a x , jenom výrazy pro výrokovou funkci, pro konstantu a pro proměnnou, tedy pro výrazy, nikoliv tyto výrazy samotné. Připadalo by nám, že výrazy pro výrokovou funkci, pro konstantu a pro proměnnou jsou jiné výrazy než výroková funkce sama, konstanta sama a proměnná sama. A abychom je rozlišili, zapisovali bychom je různě, např. použitím nějakých uvozovek:²⁵

$$\ulcorner \sim\varphi x \vee \varphi x \urcorner$$

by byl výraz pro výrokovou funkci, zatímco

$$\sim\varphi x \vee \varphi x$$

by byla výroková funkce.

Pod dojmem toho, že jsme takto zápisem rozlišili různé výrazy, by nám náš postup připadal zmatený.²⁶

25 O tzv. „kvazi-uvozovkách“ viz Quine, W. V., *Mathematical logic*, Revised edition, London, Harward Univeristy Press 1981, s. 35 a dál.

26 Pro přehled o takových diskusích viz Landini, cit. d. s. 261 a dál: např. Je „je stejného typu“ výroková funkce? atd.

§ 102

Podívejme se, co se o výrokových funkcích dočteme v *Principia Mathematica*:

Otázka po podstatě [výrokové] funkce rozhodně není snadná. Ukazuje se ale, že podstatnou charakteristikou [výrokové] funkce je víceznačnost. Vezměme např. zákon identity v podobě „A je A“, [...] Je jasné, že psychologicky vzato jde o jeden soud. Ale co máme říci o předmětu tohoto soudu? Nesoudíme, že Sokrates je Sokrates, ani že Platon je Platon, ani žádný další z jednotlivých soudů, které jsou instancemi zákona identity. Nicméně každý z těchto soudů je jakoby v dosahu našeho soudu. Ve skutečnosti soudíme víceznačnou instanci výrokové funkce „A je A“. Zjevně máme jednu myšlenku, která nemá předmět určitý, ale má jako svůj předmět neurčitou hodnotu [výrokové] funkce „A je A“.²⁷

Vezmeme-li vážně, že podstatou výrokové funkce je víceznačnost, potom pro nás bude výraz

$$p \vee q$$

víceznačný: jeho hodnotami jsou různé výroky, kterými by se stal po udělení hodnot proměnným p a q . Bereme-li jej jako hodnotu, bereme jej jako víceznačný výrok, a bereme-li jej v jeho víceznačnosti, bereme jej jako výrokovou funkci. Chceme-li mluvit o např. o jeho pravdivosti, bereme jej jako výrok, chceme-li mluvit např. o tom, že má různé hodnoty, bereme jej jako výrokovou funkci. Je to ale v obou případech jeden a tentýž výraz.

27 PM, s. 39: *The question as to the nature of a [propositional] function is by no means an easy one. It would seem, however, that the essential characteristic of a [propositional] function is ambiguity. Take, for example, the law of identity in the form „A is A“, [...] It is plain that, regarded psychologically, we have here a single judgement. But what are we to say of the object of the judgement? We are not judging that Sokrates is Sokrates, nor that Plato is Plato, nor any other of the definite judgements that are instances of the law of identity. Yet each of these judgements is, in a sense, within the scope of our judgement. We are in fact judging an ambiguous instance of the propositional function „A is A“. We appear to have a single thought which does not have a definite object, but has as its object an undetermined one of the values of the [propositional] function „A is A“.*

To potom vztáhneme i na typovou víceznačnost. Někdy bereme výraz jako výraz nějakého typu, jen není řečeno jakého, a někdy jej bereme jako typově víceznačný. V obou případech je to opět jeden a tentýž výraz.

A dále se podívejme, co se dočteme o výrazech o výrazech. Kdy jsou výrokové funkce tvrzeny, jako třeba v

$$\vdash \sim \varphi x \vee \varphi x$$

a kdy něco tvrdíme o nich, jako třeba v tvrzení

Výraz $\sim \varphi x \vee \varphi x$ je výroková funkce

není v textu rozlišeno různým zápisem. Jenom v poznámce pod čarou najdeme upozornění, že

Všimněme si, že výpovědi o smysluplnosti slovního obratu obsahujícího „ φz “ se týkají symbolu „ φz “, a nevztahuje se na ně tedy pravidlo, že podmínkou smysluplnosti je odstranitelnost funkční víceznačnosti. Smysluplnost je vlastnost značek.²⁸

V uvedených případech tedy výraz

$$\sim \varphi x \vee \varphi x$$

bereme různě: v prvním jako výrokovou funkci nebo výrok, v druhém jako výraz (jinak řečeno: jako „symbol“ nebo „znak“). Chceme-li mluvit o tom, zda a jak je smysluplný, mluvíme o výrazu jako o výrazu, chceme-li jej jindy jako nějak smysluplný tvrdit, uděláme to. Uvedený rozdíl je přitom něco, čeho si máme na svých tvrzeních všimnout, abychom mohli pokračovat v analýze, a ne změna toho, co děláme.

Tentýž výraz tedy bereme různě.

²⁸ Tamtéž, s. 48: *Note that statements concerning significance of a phrase containing „ φz “ concern the symbol „ φz “, and therefore do not fall under the rule that the elimination of the functional ambiguity is necessary to significance. Significance is a property of signs.*

§ 103

Dojem, že bereme-li nějaký výraz různě, měli bychom jej rozlišit na několik různých výrazů a jimi se zabývat zvlášť, je zavádějící, protože my myslíme stále tentýž výraz.

Proto je zavádějící rozlišit výraz pro výrokovou funkci od výrokové funkce samotné: je to stále tentýž výraz, jen různě myšlený. (Zavádí nás špatné přirovnání: mluvíme-li o věci, používáme „pro ni“ výraz, mluvíme-li o výrazu, používáme „pro něj“ výraz. Je to ale jinak: jde-li nám o věc, zabýváme se věcí, je-li tou věcí výraz, myslíme výraz.)

§ 104

Naše analýza tedy není studiem zvláštní struktury tvořené „pouhými“ znaky.

§ 105

Shrneme-li to:

- a) uvedli jsme několik málo výchozích myšlenek
- b) jejich myšlením a postupováním podle nich jsme předváděli další myšlenky a postupy důkazů; důležité přitom bylo, že každý další krok byl předvedený jako zvláštní případ nějakého předchozího kroku; výchozí myšlenky a výchozí kroky nám ale původně nemusely být nijak bližší než ty, k nimž docházíme
- c) toto předvádění myšlenek a postupů důkazů je pohybem myšlení, který nepopisujeme, ale provádíme
- d) užíváme přitom výrazy, které mají smysl

Závěr

Viděli jsme tedy, co se v tomto pojetí logiky rozhodujeme dělat, prohlédli jsme si, jak to děláme, a tím jsme se v tom pocvičili, a promysleli jsme několik otázek a dojmů, které to vyvolává a o nichž se domnívám, že zbytečně odvádějí pozornost. Snad to někomu usnadní seznamování se s logikou a její promýšlení tak, jak by to asi pomohlo mně.

Summary

The study presents an analysis of the logical ideas and of the processes of conducting demonstrations in *Principia Mathematica*. In the first step, the primitive ideas of elementary proposition, elementary propositional function, assertion of elementary proposition, assertion of elementary propositional function, disjunction and negation are introduced and the theory of deduction is developed. In the second step, the primitive ideas of proposition, propositional function, assertion of proposition, assertion of propositional function, disjunction, negation, general quantifier and individual are introduced and the theory of apparent variables is developed. The study then focuses on three questions arising from later approaches to logic: the undefined status of primitive ideas, the non-descriptive and non-prescriptive use of rules and the original identity of expressions in both their assertions and assertions about their meaning. Thus, the analysis is presented not as a mathematical object, but as a path of thought.

Příloha 1

Rejstřík a glosář

U vybraných výrazů uvádím jim odpovídající anglickou podobu z *Principia Mathematica* nebo ze sekundární literatury ^(s); nejde o překlady, ale o odkazy:

- | | | | |
|---|--|--|--|
| být stejného typu (<i>being of the same type</i>) | 17, 60–64, 66, 67, 77, 78, 80, 82, 89–91, 109–110, 112, 114, 118, 127–128, 131 | ekvivalence (<i>equivalence</i>) | 13, 25, 60, 70–75, 84–87, 89, 91 |
| definice (<i>definition</i>) | 13, 16, 26, 27, 33, 34, 36, 38, 44, 46, 47, 51, 60–61, 70, 73, 75, 81, 82, 83–102, 113–115, 117, 125, 127–128 | elementární výrok (<i>elementary proposition</i>) | 12, 13–14, 15, 16, 19–21, 24, 25–26, 28, 29, 30–31, 32, 51, 52, 53–54, 55, 60–63, 64, 65, 69, 80–81, 83, 84, 89–90, 91–92, 95, 97, 102, 103, 108, 123, 124, 125, 127, 129, 130 |
| disjunkce (<i>disjunction</i>) | 12, 13, 14, 16, 20–21, 22–24, 25, 27–28, 29, 30–31, 32, 33–48, 49–51, 52, 56–57, 58, 60–61, 65, 70–71, 77–78, 80, 84–85, 87, 89, 91–92, 94, 95–97, 103, 106–107, 123–126, 128, 130 | elementární výroková funkce (<i>elementary propositional function</i>) | 12, 13, 14, 16, 19–20, 21, 23, 24, 25, 28, 29, 30–32, 33–45, 49, 50–51, 52, 53, 54, 60, 61–63, 64, 65, 67, 69, 80, 81, 84, 88–89, 90, 91–92, 94–97, 103, 105–108, 125–127, 130 |
| dosazení (<i>substitution</i> ^s) | 13, 16, 24, 29, 31, 33–34, 37–38, 41–42, 44, 45, 51, 58–59, 65, 70, 82, 115–116, 119, 124, 132 | existenční kvantifikátor (<i>existential quantifier</i> ^s) | 16, 59, 72–74, 89, 91 |
| důkaz (<i>proof</i>) | 9, 10, 11, 12, 13, 14, 31, 32, 33–48, 49, 50–51, 68, 69–76, 77–79, 81, 82, 85–88, 100–101, 102, 103–110, 111–114, 116, 117, 120–122, 125–129, 134 | generalizace (<i>generalization</i> ^s) | 16, 17, 65–66, 72, 108, 109, 111 |
| | | hodnota (<i>value</i>) | 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19–20, 21, 22–23, 24, 25, 26, 27, 28–29, 30–31, 32, 33, 34, |

- 36, 38, 50–51, 52, 53–54, 55–57,
59, 62–65, 66, 78–79, 80, 81, 84,
91–94, 97, 103, 106, 107, 109, 115,
118, 122, 123–128, 129, 130, 132
- identifikace proměnných (*identification of variables*) 14, 31–32,
49, 51, 102, 103, 105, 126
- implikace (*implication*) 13, 16,
25–26, 27–28, 29, 32, 33–48, 50,
51, 60, 65, 70–74, 79, 80, 84–87,
89, 100, 102–103, 104–105, 107,
118, 121
- individuum (*individual*) 15, 16,
53, 55, 58, 60–64, 66–67, 80,
81–82, 89–90, 93, 94–98, 115,
124–127, 130
- inference (*inference*) 14, 16, 17, 26,
28–29, 30, 32, 34–45, 51, 65, 74,
84, 102–103, 104–105, 108–111,
117–118, 121
- instance (*instance*) 13, 16, 17,
23–24, 25, 28, 31, 32, 33–47, 49,
51, 52, 58–59, 64–65, 69–73, 78,
81, 84–86, 104–106, 113, 114,
115, 116, 117, 118, 120–121, 122,
123–126, 132
- konjunkce (*conjunction*) 13, 25,
35, 44–47, 50–51, 60, 70–75,
78–79, 84–85, 89, 91, 106–107,
126, 128
- konstanta (*constant*) 11, 15, 17,
53, 55, 61, 66, 67–68, 77, 78,
80, 81–82, 89–90, 94–98, 102,
108–110, 127–128, 130, 131
- negace (*negation*) 12, 13–14, 16,
20–21, 22–23, 25, 27–28, 29,
30–31, 32, 33–46, 50, 51, 52,
56–57, 59, 60, 61, 72–73, 77–78,
80, 81, 84, 87, 89, 92, 94–97, 103,
106–107, 109, 123, 125, 126, 128,
130
- nepravdivý (*false*) 11, 12, 15, 20,
21, 22–23, 25–26, 27, 31, 33–34,
38–39, 51, 52–54, 56–57, 59, 65,
91–94
- obecný kvantifikátor (*general quantifier*) 15, 16, 52–54, 56, 59,
61, 66, 70–74, 77, 80–81, 89, 93,
94–97, 109, 124
- paradox (*paradox*) 9, 81, 91, 121
- pravdivý (*true*) 11, 12, 14, 15,
16, 17, 20, 21, 22–23, 25–26, 27,
28–29, 30–31, 32, 33–39, 50–51,
52, 54, 56–57, 59, 64–65, 66,
68, 78–79, 84, 91–94, 98, 100,
102–103, 106–109, 112, 116, 117,
118, 121, 122, 126, 128, 132
- pravidlo (*rule*) 13–14, 16, 17, 26,
28, 29, 30, 31, 32, 36–37, 49, 51,
65–66, 67–68, 69, 77, 79, 80, 81,
82, 84, 89, 91, 102–122, 126, 128,
133
- proměnná (*variable*) 11, 12, 13,
14, 15, 16–17, 19–20, 21, 24,
25–26, 28, 30–31, 32, 34–43, 49,
50–51, 53, 54–55, 56–57, 58,
59, 61, 63, 64–65, 66–68, 70, 77,
78–79, 80, 81–82, 89–90, 91–94,
95–98, 102, 103, 105–110, 112,
114, 115–116, 118, 123–128,
129–130, 131, 132
- přehlednost (*representation to the eyesight*) 10, 14, 26, 33, 41, 68,
84, 99, 123, 125
- samozřejmost (*obviousness*) 13, 33,
41, 68

- smysl (*meaning*) 9, 13, 16, 17, 20,
 26, 29, 54, 60–61, 66–67, 77,
 78–79, 80, 81–82, 88–91, 94, 98,
 99, 106–110, 115, 122, 123, 125,
 127–128, 133, 134
 smysluplný (*significant*) 17,
 66–67, 77, 78–79, 80, 81–82, 106,
 109, 110, 115, 128, 133
 tvrzení (*assertion*) 12, 13, 14, 16,
 17, 19–20, 25, 27–28, 29, 30, 31,
 32, 33–48, 49, 50–51, 52, 59, 61,
 64, 65, 66, 67, 68, 69–76, 77–78,
 79, 80–81, 82, 83, 84–88, 91–92,
 99, 102–110, 111–114, 115–116,
 117, 118, 120–121, 122, 125–128,
 130, 133
 typová víceznačnost (*typical ambi-
 guity*) 17, 80–81, 90, 110, 119,
 124, 129, 130, 133
 umělý výraz (*symbol*) 9, 10, 12, 13,
 14, 15, 16, 19, 20, 26, 27, 28, 30,
 33, 49, 69, 78, 80, 85, 88, 89, 91,
 92–94, 102, 104–106, 110, 116,
 117, 118–119, 121, 122, 123, 131
 vázaná proměnná (*apparent varia-
 ble*) 12, 15, 19, 30–31, 52–54,
 61, 63, 65, 70, 80, 89–90, 91–95,
 97, 115–116, 127, 130
 víceznačnost (*ambiguity*) 132
 volná proměnná (*real variable*) 15,
 53, 56–57, 58, 61, 80, 89, 95,
 97–98, 127, 129
 výchozí myšlenka (*primitive
 idea*) 9, 10, 11, 12, 15, 17, 19,
 27, 30–31, 36, 51–52, 78, 80, 82,
 83–84, 89, 91, 92–94, 98,
 100–101, 102, 103, 123, 124, 134
 výchozí krok, resp. výchozí tvrzení
 (*primitive proposition*) 11, 13,
 14, 16, 17, 25, 27, 28, 29, 30, 31,
 32, 33, 34–41, 49, 52, 60–61, 64,
 65, 66–67, 68, 69, 78, 82, 84, 102,
 104, 108, 112–114, 116–117, 122,
 125, 134
 výraz (*expression*) 9, 11, 13, 15, 16,
 17, 20, 21, 23, 51, 52–53, 54, 55,
 56, 58, 60–63, 66–67, 68, 77–78,
 80, 81–82, 83–85, 88, 89–91,
 92–94, 95–98, 99–100, 101–102,
 103–110, 115–116, 117, 118–119,
 120–121, 122, 123–129, 131,
 132–133, 134
 výrok (*proposition*) 11, 12, 14, 15,
 16, 17, 30, 49, 52–54, 56–57, 58–
 59, 60, 61–64, 65, 66, 67–68, 69,
 74, 77, 78, 80–81, 82, 83, 88–90,
 91–94, 95–98, 102–103, 106, 108,
 109, 110, 111–112, 115–116, 117,
 118–119, 120–121, 122, 123–125,
 127–129, 130, 132–133, 134
 výroková funkce (*propositional
 function*) 11, 12, 13, 14–15, 16,
 17, 19, 52–54, 55, 56, 57, 58–59,
 60, 61–64, 65, 66, 67–68, 69–73,
 77–78, 79, 80–81, 82, 83–90,
 92–94, 95, 97–98, 100, 108–110,
 112–115, 116–117, 120–121, 122,
 123–129, 130, 131, 132–133, 134
 zkratka (*abbreviation*) 10, 13, 16,
 25–26, 29, 33–35, 38–42, 44–45,
 59–60, 61, 69–70, 83–91, 97,
 98–100, 103, 113–114, 125, 127

Co je logika?
Studie k chápání logiky v *Principia Mathematica*
Bertranda Russella a Alfreda N. Whiteheada
Tomáš Holeček

Jako Suplementum III Ročenky pro filosofii a fenomenologický výzkum
vydalo vydavatelství Togga, spol. s r. o.,
Volutová 2524, Praha 5

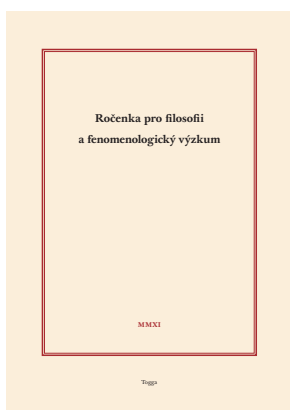
Recenzovali: Vojtěch Kolman a Michal Zadražil

© Tomáš Holeček, 2014
Obálka, typografie a sazba z písma Baskerville
upraveného Františkem Štormem: Dušan Neumahr
Jazyková korektura: Vendula Kadlečková
Vydala: Togga, spol. s r. o., Volutová 2524, Praha 5
Vydání první, Praha 2014
© Togga, 2014
ISBN 978-80-7476-058-7

Jako základní vydání
Ročenky pro filosofii a fenomenologický výzkum
dosud vyšlo:

– *podrobnější informace o jednotlivých publikacích*
(dostupnost, ceny, anotace, zvýhodněné nabídky)
naleznete na stránkách internetového obchodu

www.eshop.togga.cz

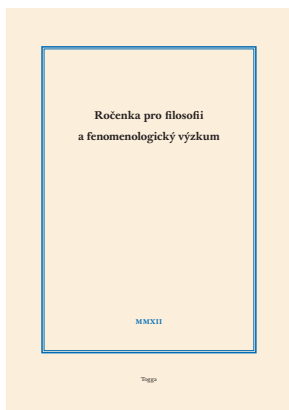


Aleš NOVÁK (ed.)

**Ročenka pro filosofii a fenomenologický
výzkum 2011**

140 stran, vol. 1

Ročenka pro filosofii a fenomenologický výzkum je novou publikační platformou živého bádání v oblasti české a slovenské filosofie. Autory prvního svazku, který se koncentruje kolem problematiky časovosti lidské existence, jsou Ladislav Benyovszky, Tomáš Holeček, Klement Mitterpach, Aleš Novák, Jaroslav Novotný, Marie Pětová, Václav Zajíc a Richard Zika. Ve svých příspěvcích promýšlejí buď v historickém kontextu (Anaximandros, Aristotelés, Liber de Causis, Descartes, Hölderlin, Heidegger) nebo svébytně souvislost času a řeči, času a jednání, časovosti a přírody, vědomí času a vnímání prostoru. Pozoruhodné jsou především originální deskripce jednak fenoménu čekání a jednak proměn významu při vnímání prostoru v situacích, kdy takzvané máme, nebo nemáme čas.

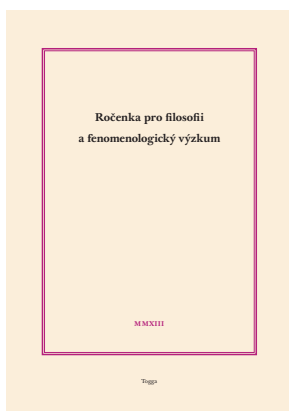


Aleš NOVÁK (ed.)

Ročenka pro filosofii a fenomenologický výzkum 2012

170 stran, vol. 2

Ročenka pro filosofii a fenomenologický výzkum je novou publikační platformou živého bádání v oblasti české a slovenské filosofie. Autory druhého svazku jsou Ladislav Benyovszky, Tomáš Holeček, Jakub Marek, Aleš Novák, Jaroslav Novotný a Václav Zajíc. Ve svých příspěvcích pokaždé jinak, ale vždy konkrétně dokáží odpovídat na otázky zkoumající živost, životaschopnost, a tedy poctivost dané filosofické pozice, tematizace a práce.



Aleš NOVÁK (ed.)

Ročenka pro filosofii a fenomenologický výzkum 2013

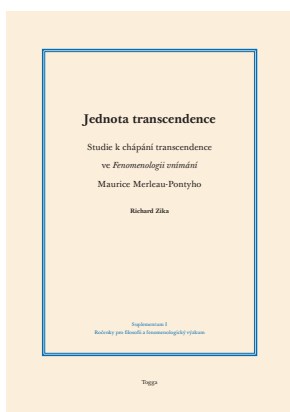
242 stran, vol. 3

Třetí ročník Ročenky pro filosofii a fenomenologický výzkum měl opět tři hlavní bloky: První se věnoval myšlení Edmunda Husserla (mj. přináší komentář k Husserlovu pojednání Filosofie jako přísná věda, které vychází zároveň s Ročenkou III/2013), druhý tematizoval „limity transcendence“ (konkrétně na příkladech díla Maxe Picarda, Egona Bondyho a filosofického zenu-buddhismu) a ve třetím byly představeny dílčí studie k filosofické antropologii, filosofii logiky a kunsthistorii. Autory svazku jsou Aleš Novák, Richard Zika, Taťána Petříčková, Nicol Svárovská, Petra Těboříková, Radek Suchý, Václav Zajíc, Josef Matoušek, Tomáš Holeček a Ondřej Váša.

Jako Supplementa
Ročenky pro filosofii a fenomenologický výzkum
dosud vyšlo:

– *podrobnější informace o jednotlivých publikacích*
(dostupnost, ceny, anotace, zvýhodněné nabídky)
naleznete na stránkách internetového obchodu

www.eshop.togga.cz

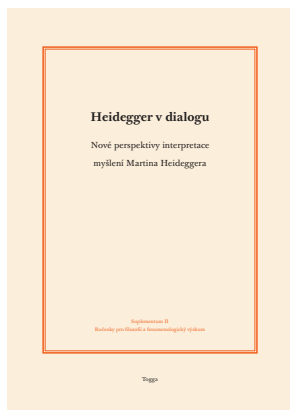


Richard ZIKA

Jednota transcendence

Studie k chápání transcendence ve *Fenomenologii vnímání* Maurice Merleau-Pontyho
102 stran, *Supplementum I*

Záměrem předkládané publikace je vyjasnit chápání transcendence ve *Fenomenologii vnímání* Maurice Merleau-Pontyho. Na jedné straně má tematizace tradičního filosofického termínu přispět k porozumění celku zvoleného díla a na druhé má výběr jednoho z nejvýznamnějších fenomenologických děl napomoci k porozumění termínu. Zkoumání reflektuje jednotlivá použití zvoleného termínu ve *Fenomenologii vnímání*, vyzdvihuje jejich souvislost a získané porozumění opatrně přenáší i tam, kde sám Merleau-Ponty termín 'transcendence' nepoužívá.



Aleš NOVÁK (ed.)

Heidegger v dialogu

Nové perspektivy interpretace myšlení

Martina Heideggera

212 stran, *Supplementum II*

Filosofie se rodí v dialogu a pouze v něm zůstává nadále živá. Klást otázky patří k základnímu étosu opravdové filosofické práce, která se nesmí zastavit před žádnou autoritou. Klást filosofické otázky Martinu Heideggerovi se často však redukuje na (vposled oprávněné) morální a politické ostouzení, obviňování a odmítání bez samotného zabývání se záležitostmi jeho myšlení. Nicméně politické pohoršení tak při vši legitimitě mnohdy slouží pouze jako alibismus maskující skutečnou neochotu či neschopnost zabývat se jeho náročným, a přeci přínosným filosofováním. Když je Heideggerovo myšlení poctivě a kriticky dotazováno „sine ira et studio“, ukazuje se jako produktivní a inspirativní. Mezinárodní kolektiv autorů představuje nové perspektivy, ze kterých recentní badatelský zájem pohlíží na konkrétní aspekty Heideggerova myšlení. Autory jednotlivých kapitol uvádějících Heideggerovo myšlení do konkrétních forem dialogu jednak s jinými dějinnými autoritami, jednak speciálně s novověkou (přírodo)vědou, jsou Ladislav Benyovszky, Jana Kružíková, Jakub Marek, Aleš Novák, Peter Trawny a Holger Zaborowski.

– uvedené tituly je možné pohodlně zakoupit a nechat si je zaslat
poštou prostřednictvím elektronického obchodu na našich
internetových stránkách www.togga.cz
anebo přímo na adrese www.eshop.togga.cz

• platí do vyprodání nákladu •

- knihy budou odeslány dle požadovaného způsobu dodání a platby
obvykle nejpozději do tří dnů ode dne objednání •
- poštovní poplatky nebudou účtovány •

