

Úvod do logiky

Tomáš Holeček

9. května 2013

Tento učební text nemá samostatný smysl; má sloužit jen jako pomůcka pro přípravu ke zkoušce.

1.

Budeme se zabývat výrazy, jejichž význam je natolik pevný a natolik v našich rukou, nakolik potřebujeme.

2.

Rozlišíme tři druhy výrazů:

- *Výroky* jsou výrazy, jimiž bychom něco říkali. Například „Petr jde do školy.“ berme jako výrok. (Pro výroky budeme používat proměnné $p, q, r, \dots$)
- *Výrokové funkce* jsou výrazy obsahující proměnné, z nichž se stanou výroky, udělíme-li jejich proměnným nějaké hodnoty. Například „ x jde do školy.“ berme jako výrokovou funkci, která se stane výrokem, pokud proměnné x udělíme hodnotu „Petr“. (Pro výrokové funkce budeme používat proměnné $\varphi, \psi, \chi, \dots$ a budeme-li chtít vyznačit, jaké proměnné obsahují, zapíšeme je k nim, například φxy je funkce dvou proměnných x a y .)
- *Individua* jsou výrazy, které nejsou ani výroky, ani výrokové funkce. Například „Petr“ nebo „škola“ berme jako individua. (Pro individua budeme používat proměnné $x, y, z, \dots$)

3.

Nadále se ale nebudeme zabývat výroky přímo, budou pro nás jenom zamýšlenými hodnotami výrokových funkcí, tj. tím, čím se výrokové funkce stanou po udělení hodnot proměnným. Stejně tak nebudeme uvažovat o žádných konstantních individuích, a proto pro ně obvyklé znaky $a, b, c, \dots$ budeme používat také jako proměnné.

4.

Zaměříme se především na tři výchozí výrokové funkce:

- *Negace* je výroková funkce jedné proměnné pro výroky, jejíž hodnotou je výrok, jímž bychom popírali původní výrok. (Negaci zapisujeme $\sim p$ a čteme „ne p “.) Například $\sim$ „Petr jde do školy.“ je výrok „Petr nejde do školy.“
- *Disjunkce* je výroková funkce dvou proměnných pro výroky, jejíž hodnotou je výrok spojující původní výroky tak, že bychom jím říkali aspoň jeden z nich, a tedy připouštěli popření nejvýše jednoho z nich. (Disjunkci zapisujeme $p \vee q$ a čteme „ p nebo q “, přičemž máme na mysli tzv. nevylučovací nebo.) Například „Petr jde do školy.“ $\vee$ „Michal jde do školy.“ je výrok „Petr jde do školy nebo Michal jde do školy“, kterému rozumíme jako „Aspoň jeden z nich tam jde“.
- *Obecný kvantifikátor* je výroková funkce jedné proměnné pro výrokové funkce, jejíž hodnotou je výrok, kterým bychom říkali všechny výroky, které jsou smysluplnými hodnotami původní funkce. (Obecný kvantifikátor zapisujeme $\forall x \varphi x$ a čteme „pro každé $x, \varphi x$ “; o x říkáme, že je v kvantifikátoru vázaná, a používáme ji k vyznačení toho, z hodnot jaké proměnné vznikají ty hodnoty funkce.) Například $\forall x$ „ x jde do školy.“ je výrok „Pro každé x, x jde do školy.“, kterému rozumíme jako „Všichni jdou do školy.“

5.

Tyto výrokové funkce skládáme do složitějších. Pořadí složení budeme v zápisech vyznačovat tím, že negace a obecný kvantifikátor mají přednost před disjunkcí, není-li závorkami určeno, že je to naopak. Například tedy

$$\sim\sim p$$

$$\sim p \vee q$$

$$\sim(p \vee q)$$

$$\forall x \sim \varphi x$$

$$\sim \forall x \varphi x$$

$$\forall x \varphi x \vee \psi x$$

$$\forall x (\varphi x \vee \psi x)$$

$$\forall x (\varphi x \vee \sim(\psi x \vee \sim \varphi x))$$

jsou výrokové funkce: negace negace výroku p , disjunkce negace výroku p a výroku q , negace disjunkce výroku p a výroku q , obecně kvantifikovaná negace výrokové funkce φ , negace obecně kvantifikované výrokové funkce φ , disjunkce obecně kvantifikované výrokové funkce φ s hodnotou výrokové funkce ψ pro proměnnou x (v tomto případě kvantifikátor nedosáhne na x v ψx a o takové proměnné říkáme, že je volná), obecně kvantifikovaná disjunkce výrokových funkcí φ a ψ (v tomto případě je x naopak vázaná ve φx i v ψx) a obecně kvantifikovaná disjunkce výrokové funkce φ a negace disjunkce výrokové funkce ψ a negace výrokové funkce φ .

6.

Při úvahách o výrokových funkcích více proměnných záleží na pořadí, v němž proměnné zapisujeme. Například tedy

$$\forall x \varphi xy$$

$$\forall x \varphi yx$$

$$\forall x \sim \forall y \varphi xy$$

$$\forall x \sim \forall y \varphi yx$$

jsou výrokové funkce: hodnota obecně kvantifikované (přes proměnnou na prvním místě) výrokové funkce φ pro proměnnou y na druhém místě, hodnota obecně kvantifikované (přes proměnnou na druhém místě) výrokové funkce φ pro proměnnou y na prvním místě, obecně kvantifikovaná (přes proměnnou na prvním místě) negace obecně kvantifikované (přes proměnnou na druhém místě) výrokové funkce φ , obecně kvantifikovaná (přes proměnnou na druhém místě) negace obecně kvantifikované (přes proměnnou na prvním místě) výrokové funkce φ . Kdybychom udělili proměnné φ hodnotu „bere si pomeranč od“, pak by to byly dvě výrokové funkce: „Každý si bere pomeranč od y .“ a „ y si bere pomeranč od každého.“, a dva výroky: „Každý si ne od každého bere pomeranč.“, což česky říkáme spíše jako „Nikdo si nebere pomeranč od každého.“, a „Od každého si ne každý bere pomeranč.“, což česky říkáme spíše jako „Od nikoho si nebere pomeranč každý.“.

7.

Některé složené výrokové funkce označíme zkratkami a pojmenujeme:

- *Konjunkce* je zkratka za $\sim(\sim p \vee \sim q)$, zapisujeme ji $p \wedge q$ a čteme „ p a q “.
- *Implikace* je zkratka za $\sim p \vee q$, zapisujeme ji $p \rightarrow q$ a čteme „když p , pak q “.

- *Ekvivalence* je zkratka za $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, zapisujeme ji $p \leftrightarrow q$ a čteme „ p , právě když q “.
- *Existenční kvantifikátor* je zkratka za $\sim \forall x \sim \varphi x$, zapisujeme ji $\exists x \varphi x$ a čteme „pro některé x , φx “.

8.

I tyto výrokové funkce skládáme dále do složitějších. V jakýchkoli takto složených funkcích ale umíme rozepsat zkratky tak, abychom dostali výrokovou funkci složenou jen z výchozích výrokových funkcí. Například

$$\begin{aligned} &(p \vee p) \rightarrow p \\ &\sim((p \vee q) \rightarrow r) \\ &(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r) \\ &(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge r) \\ &\sim \exists x \varphi x \\ &\forall x \exists y (\sim \varphi x \wedge \psi x) \end{aligned}$$

rozepíšeme jako

$$\begin{aligned} &\sim(p \vee p) \vee p \\ &\sim(\sim(p \vee q) \vee r) \\ &\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(\sim q \vee \sim r) \\ &\sim(\sim(\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(\sim q \vee \sim r)) \vee \sim(\sim(\sim q \vee \sim r) \vee \sim(\sim p \vee \sim q))) \\ &\sim \sim \forall x \sim \varphi x \\ &\forall x \sim \forall y \sim \sim(\sim \sim \varphi x \vee \sim \psi x) \end{aligned}$$

9.

Výrokové funkce zkoumáme s ohledem na to, zda jsou vnitřně slučitelné, tj. zda bychom výroky, kterými se stanou, něco neříkali a nepopírali současně. Zkoumáme je pomocí stromů, což jsou jejich postupné rozklady. V kořeni stromu bude rozkládaná výroková funkce a jeho větve budou jí připouštěné varianty posloupností výrokových funkcí, na které ji rozložíme. Pokud na každé větvi najdeme nějakou výrokovou funkci i její negaci (o takové větvi říkáme, že je uzavřená), a nezbude tedy žádná připouštěná varianta, poznáme, že zkoumaná výroková funkce je vnitřně neslučitelná. Pokud najdeme aspoň jednu větev, na níž už bude rozloženo všechno, co na ní lze rozložit (o té větvi říkáme, že je nasycená), a která přitom nebude uzavřená, poznáme, že zkoumaná výroková funkce je vnitřně slučitelná. Při rozvíjení stromů sledujeme tato výchozí pravidla:

- *Samotnou negaci* už dále nerozkládáme.
- *Disjunkci* rozložíme tak, že strom rozdělíme na dvě větve, na něž přidáme jednotlivé členy disjunkce.
- *Obecný kvantifikátor* rozložíme tak, že na větev postupně přidáme kvantifikovanou funkci s dosazením všech volných proměnných pro individua, které se na větvi vyskytují. Pokud na větvi dosud žádná volná proměnná pro individua není, tak si nějakou vymyslíme. Pokud se v dalším rozkladu další volné proměnné pro individua na větvi vyskytnou, dosadíme je také.
- *Negaci negace* rozložíme tak, že na větev přidáme původně negovanou výrokovou funkci.

- *Negaci disjunkce* rozložíme tak, že na větev postupně přidáme negace obou členů disjunkce.
- *Negaci obecného kvantifikátoru* rozložíme tak, že na větev přidáme negaci kvantifikované funkce s dosazením nové (tj. takové, která se dosud na větvi nevyskytuje) volné proměnné pro individua.

10.

Rozkládáme-li výrokové funkce, v nichž používáme zkratky, můžeme je buď nejprve rozepsat, nebo sledovat tato odvozená pravidla:

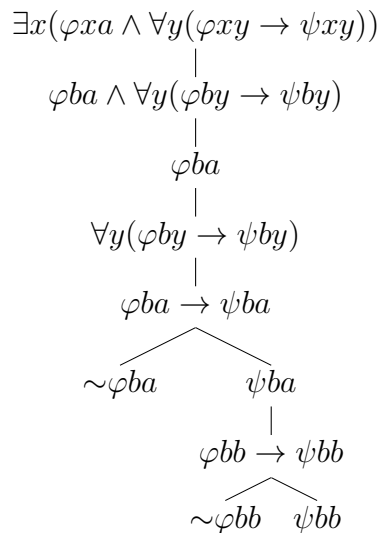
- *Konjunkci* rozložíme tak, že na větev postupně přidáme oba její členy.
- *Implikaci* rozložíme tak, že strom rozdělíme na dvě větve, na jednu přidáme negaci předního členu implikace a na druhou zadní člen implikace.
- *Ekvivalenci* rozložíme tak, že strom rozdělíme na dvě větve, na jednu přidáme postupně oba členy ekvivalence a na druhou postupně negace obou jejích členů.
- *Existenční kvantifikátor* rozložíme tak, že na větev přidáme kvantifikovanou funkci s dosazením nové volné proměnné pro individua.
- *Negaci konjunkce* rozložíme tak, že strom rozdělíme na dvě větve, na jednu přidáme negaci předního členu konjunkce a na druhou negaci jejího zadního členu.
- *Negaci implikace* rozložíme tak, že na větev postupně přidáme její přední člen a negaci jejího zadního členu.
- *Negaci ekvivalence* rozložíme tak, že strom rozdělíme na dvě větve, na jednu přidáme postupně první člen ekvivalence a negaci jejího druhého členu a na druhou postupně negaci jejího prvního členu a její druhý člen.
- *Negaci existenčního kvantifikátoru* rozložíme tak, že na větev postupně přidáme negace kvantifikované funkce s dosazením všech volných proměnných pro individua, které se na větvi vyskytují. (Pokud na větvi dosud žádná volná proměnná pro individua není, tak si nějakou vymyslíme, a pokud se v dalším rozkladu další volné proměnné pro individua na větvi vyskytnou, dosadíme je také. Je to stejné jako u rozkladu obecného kvantifikátoru.)

11.

Pravidla jsou vymyšlena tak, aby k výrokové funkci nevyhledávala všechny přípouštěné varianty, ale abychom jejich sledováním mohli najít aspoň jednu přípouštěnou variantu, pokud nějaká je, a abychom jejich sledováním mohli vyloučit všechny, pokud žádná není.

12.

Například výrokovou funkci $\exists x(\varphi xa \wedge \forall y(\varphi xy \rightarrow \psi xy))$ rozložíme stromem

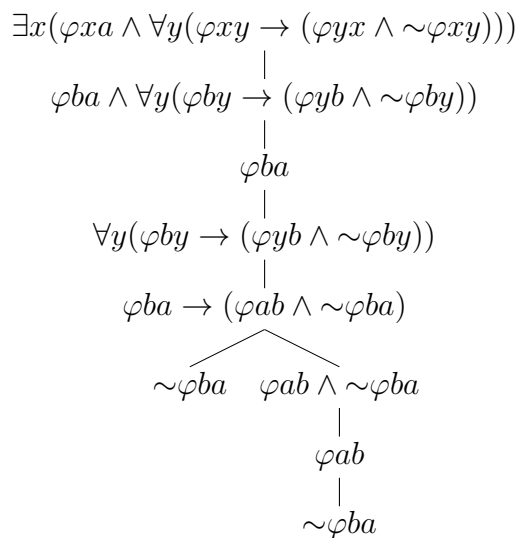


Tento strom má tři větve, z nichž ta nejvíc nalevo je uzavřená, protože na ní najdeme výrokovou funkci φba i její negaci $\sim \varphi ba$ (jakmile jsme uzavření našli, už v rozkladu na této větvi dále nepokračujeme a b do $\forall y(\varphi by \rightarrow \psi by)$ nedosazujeme), a ty dvě zbývající jsou nasycené a přitom nejsou uzavřené. Pomocí tohoto stromu poznáváme, že tato výroková funkce je vnitřně slučitelná: uvažujeme-li o dvou volných proměnných pro individua, což je minimum, které náš rozklad v tomto případě vyžaduje, pak připouští nejméně dvě varianty:

1. $\varphi ba, \psi ba$
2. $\varphi ba, \psi ba, \psi bb$

13.

Například výrokovou funkci $\exists x(\varphi xa \wedge \forall y(\varphi xy \rightarrow (\varphi yx \wedge \sim \varphi xy)))$ rozložíme stromem

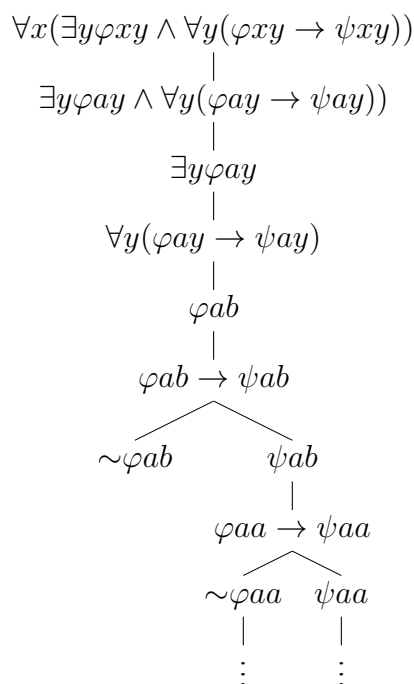


Tento strom má dvě uzavřené větve, a jeho pomocí poznáváme, že výroková funkce je vnitřně rozporná. Negacím vnitřně rozporných funkcí a takovým výrokovým funkcím, jejichž negace je

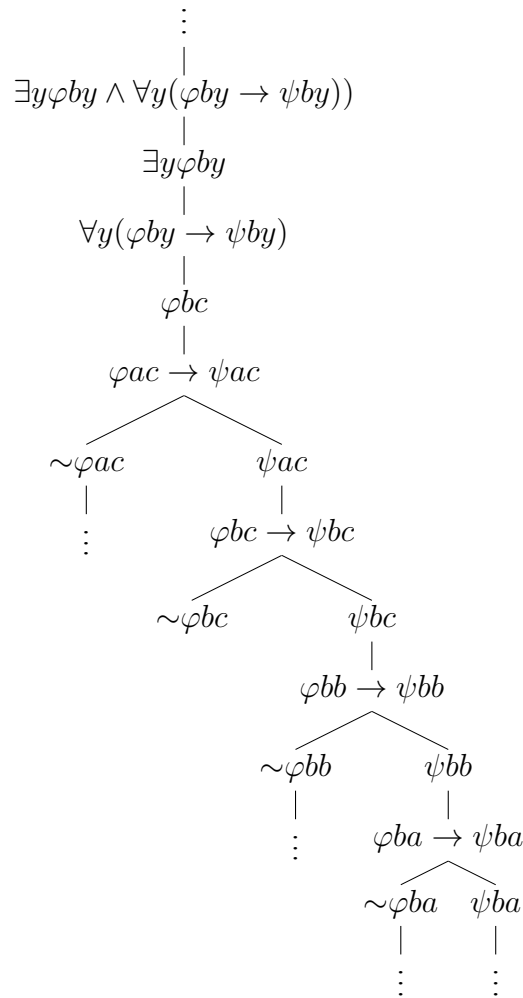
vnitřně rozporná, říkáme logické zákony, a $\sim \exists x(\varphi xa \wedge \forall y(\varphi xy \rightarrow (\varphi yx \wedge \sim \varphi xy)))$ je tedy logický zákon.

14.

V některých případech by nasycená neuzavřená větev byla nekonečná a pokud bychom jejím nalezením minili nalezení po konečném počtu rozkládajících kroků, najít bychom ji nemohli. Například výrokovou funkci $\forall x(\exists y\varphi xy \wedge \forall y(\varphi xy \rightarrow \psi xy))$ rozložíme stromem



Tento strom má tři větve, z nichž ta nejvíc nalevo je uzavřená, ale dvě zbývající nejsou ani uzavřené, ani nasycené; za x ve výrokové funkci $\exists y\varphi ay \wedge \forall y(\varphi ay \rightarrow \psi ay)$ bylo zatím dosazeno jenom a , ale mělo by být dosazeno i b . Rozklad na větvi nejvíc vpravo by pokračoval



Z toho poznáme, jak tato větev bude pokračovat: tak, jako dosazení a na ní vedlo k nalezení výrokových funkcí $\varphi ab, \psi ab, \psi aa$ a dosazení b k nalezení výrokových funkcí $\varphi bc, \psi ac, \psi bc, \psi bb, \psi ba$, povede dále dosazení c k nalezení výrokových funkcí $\varphi cd, \psi ad, \psi bd, \psi cd, \psi cc, \psi cb, \psi ca...$ atd. Jinými slovy: s jakoukoli proměnnou bude nějaká nová proměnná na druhém místě ve φ a postupně všechny proměnné na druhém místě v ψ .

15.

Protože rozklady na některých větvích mohou jít do nekonečna, musíme při rozkládání postupovat takticky. Mohlo by se totiž stát, že přehlédneme nějakou možnost uzavření větve.

16.

Zkoumáme dále sady výrokových funkcí, kterým říkáme teorie. Je-li jejich konjunkce vnitřně slučitelná, říkáme i o teorii, že je vnitřně slučitelná (konzistentní).

17.

A dále zkoumáme vztahy sad výrokových funkcí (předpokladů) k jiným výrokovým funkcím (závěrům). Je-li konjunkce předpokladů s negací závěru vnitřně neslučitelná, říkáme o závěru, že vyplývá z předpokladů; je-li naopak vnitřně slučitelná, říkáme, že nevyplyvá.