

# 1 Jednoduché úlohy

1.

Rozhodněte a dokažte, zda je následující teorie konzistentní:

$$\begin{aligned} &\forall x(\varphi x \vee \psi x) \\ &\forall x(\varphi x \rightarrow \sim \psi x) \end{aligned}$$

2.

Rozhodněte a dokažte, zda výroková funkce  $\exists x \varphi x$  vyplývá z předpokladů

$$\begin{aligned} &\exists x \psi x \\ &\forall x(\psi x \rightarrow \varphi x) \end{aligned}$$

3.

Rozhodněte a dokažte, zda je výroková funkce (a její negace)  $\forall x(\varphi x \vee \sim \varphi x)$  vnitřně slučitelná.

4.

Rozhodněte a dokažte, zda je výroková funkce (a její negace)  $\exists x \varphi ax \wedge \exists x \sim \varphi ax$  vnitřně slučitelná.

5.

Rozhodněte a dokažte, zda výroková funkce  $\forall x(\varphi x \rightarrow \chi x)$  vyplývá z předpokladů

$$\begin{aligned} &\forall x(\varphi x \rightarrow \psi x) \\ &\forall x(\psi x \rightarrow \chi x) \end{aligned}$$

6.

Rozhodněte a dokažte, zda výroková funkce  $\forall x \exists y \varphi xy$  vyplývá z předpokladů

$$\begin{aligned} &\forall x \exists y \psi xy \\ &\forall x \forall y (\psi xy \rightarrow \varphi xy) \end{aligned}$$

# 2 Složitější úlohy

7.

Rozhodněte a dokažte, zda je následující teorie konzistentní:

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y (\varphi xy \vee \psi yx) \\ &\forall x \forall y (\varphi xy \rightarrow \sim \varphi yx) \\ &\forall x \forall y ((\varphi xy \wedge \psi yx) \rightarrow \exists z (\varphi zx \wedge \varphi zy)) \\ &\exists x \exists y (\varphi xy \wedge \psi yx) \\ &\forall x \forall y \forall z ((\varphi xy \wedge \varphi yz) \rightarrow \varphi zx) \end{aligned}$$

8.

Rozhodněte a dokažte, zda výroková funkce  $\forall x \forall y ((\varphi x \wedge \varphi y) \rightarrow (\psi xy \wedge \psi yx))$  vyplývá z předpokladů

$$\begin{aligned} & \forall x (\varphi x \rightarrow \chi x) \\ & \forall x \forall y ((\chi x \wedge \chi y) \rightarrow \exists z (\psi xz \wedge \psi zy)) \\ & \forall x \forall y (\psi xy \rightarrow \psi yx) \\ & \forall x \forall y \forall z ((\psi xy \wedge \psi yz) \rightarrow \psi xz) \end{aligned}$$

9.

Rozhodněte a dokažte, zda je výroková funkce (a její negace)  $\forall x \forall y (\varphi xy \rightarrow \forall z (\sim \varphi xz \rightarrow \sim \varphi yz)) \leftrightarrow \forall x \forall y (\exists z (\varphi xz \wedge \varphi zy) \rightarrow \varphi xy)$  vnitřně slučitelná.

10.

Rozhodněte a dokažte, zda je výroková funkce (a její negace)  $\forall x (\chi x \rightarrow \exists y \exists z (\varphi yz \wedge \varphi xz)) \leftrightarrow \forall x (\forall y \forall z \sim (\varphi yz \wedge \varphi xz) \rightarrow \sim \chi x)$  vnitřně slučitelná.

11.

Rozhodněte a dokažte, zda výroková funkce  $\forall x \forall y (\varphi xy \rightarrow \exists z (\psi xz \wedge \psi yz))$  vyplývá z předpokladů

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y \psi xy \\ & \forall x \forall y (\psi xy \rightarrow \sim \psi yx) \\ & \forall x \forall y \forall z ((\psi xy \wedge \psi yz) \rightarrow \psi xz) \\ & \forall x \forall y (\varphi xy \leftrightarrow (\psi xy \vee \psi yx)) \end{aligned}$$

12.

Rozhodněte a dokažte, zda výroková funkce  $\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall x \forall y (\chi xy \wedge \xi xy)$  vyplývá z předpokladů

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y (\varphi x \wedge \psi y) \rightarrow \chi xy \\ & \forall x ((\varphi x \vee \psi x) \vee \chi xx) \\ & \forall x \forall y ((\varphi x \wedge \varphi y) \rightarrow \vartheta xy) \\ & \forall x \forall y ((\chi yx \wedge \vartheta xy) \rightarrow \xi xy) \end{aligned}$$

### 3 Řešení

1. konzistentní, 2. vyplývá, 3. ona ano, její negace ne, 4. ona i její negace ano, 5. vyplývá, 6. vyplývá, 7. nekonzistentní, 8. vyplývá, 9. ona i její negace ano, 10. ona ano, její negace ne, 11. vyplývá, 12. vyplývá.