

O úloze pravidel v analýze

Tomáš Holeček

1. Úvod

V této studii promyslíme úlohu toho, čemu dnes říkáme „pravidla kalkulu“ v odvozování. Srovnáme jejich pojetí jako podmíněných výroků o posloupnostech symbolicky zapsaných tvrzení s vybranými komentáři k původní úloze, kterou v analýze měla. Rozlišování symbolicky zapsaných tvrzení od „pravidel“, která mají popisovat nebo předepisovat práci s nimi, má v logice dlouhou tradici. Jako příklad tohoto pojetí můžeme vzít první větu Gödela-va článku *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls* (1930):

„Whitehead a Russell, jak známo, vystavěli logiku a matematiku tak, že jisté evidentní věty postavili na začátek jako axiomy a z nich, podle nějakých přesně formulovaných principů činění závěrů, čistě formálním způsobem (tj. bez dalšího užívání významu symbolů) dedukovali věty logiky a matematiky.“¹

Co je v této větě nazváno „principy činění závěrů“ (něm. Schlussprinzipien), pak v dalším textu už vystupuje rovnou jako „pravidla“ (něm. Schlussregeln). Ze symbolicky zapsaných tvrzení a ze symbolů vůbec se stávají předměty manipulace a z ostatních tvrzení popisy nebo předpisy, jak tuto manipulaci pro-

1 Gödel, K.: „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls“. In: *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 37. 1930, 2. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, s. 349–360, s. 349.

vádíme nebo máme provádět. Tento výklad zmíněného podání logické analýzy je uveden výstižným výrazem „jak známo“. V této studii se zamyslíme nad některými otázkami, které tento výklad, dnes v oboru závazný, vyvolává.

2. Příklad odvození

Podívejme se na příklad odvození v *Principiích Mathematica* (1910).² Předpokládejme, že v předchozím rozvoji už máme

$$*3.47 \quad \vdash ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s))$$

$$*9.12 \quad \text{Co je implikované pravdivou premisou, je pravdivé. Pv.}$$

$$*10.1 \quad \vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y \text{ Pv.}$$

$$*10.13 \quad \text{Jsou-li v } \varphi x \text{ a v } \psi x \text{ argumenty stejného typu a máme-li už „} \vdash \varphi x \text{“ a „} \vdash \psi x \text{“, budeme mít i „} \vdash \varphi x \wedge \psi x \text{“}.$$

Tam, kde *3.47 je už odvozené tvrzení výroku, resp. výrokové funkce, symbolicky zapsané, *9.12 je tvrzení primitivního (tj. výchozího) výroku, *10.1 je také tvrzení primitivního výroku, resp. výrokové funkce, ovšem v tomto případě symbolicky zapsané, a *10.13 je už odvozené tvrzení výroku. Jak vidíme, některá tvrzení jsou symbolicky zapsaná a jiná ne a některá tvrzení jsou výchozí a jiná už odvozená. Jako příklad odvození vezměme:

$$*10.14 \quad \vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$$

Důkaz:

$$*10.1 \quad \vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y \tag{1}$$

$$*10.1 [\varphi x := \psi x] \quad \vdash \forall x \psi x \rightarrow \psi y \tag{2}$$

$$(1), (2), *10.13 \quad \vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} *3.47 [p := \forall x \varphi x, q := \forall x \psi x, r := \varphi y, s := \psi y] \\ \vdash ((\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)) \rightarrow ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \\ \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)) \end{aligned} \tag{4}$$

$$(3), (4), *9.12 \quad \vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$$

2 Russell, B., Whitehead, A. N.: *Principia Mathematica vol. I.*, 2nd edition. 1927 (první vydání 1910). Cambridge: Cambridge University Press. Dále citováno jako PM. Zachováváme číslování tvrzení podle originálu, symboliku ale upravuji tak, aby byla dnes čitelnější; původní notace podle Peana by mohla působit zbytečné nesnáze.

Jednotlivé řádky důkazu tu znamenají: (1) je zápis tvrzení *10.1 jako premisy, (2) je zápis instance tvrzení *10.1, v níž za proměnnou pro výrokové funkce φx dosazujeme výrokovou funkci ψx , jako premisy, (3) je zápis spojení předchozích dvou premis identifikující proměnnou y podle výroku *10.13, opět jako premisy, (4) je instance tvrzení *3.47, v níž za proměnnou pro výroky p dosazujeme výrok $\forall x \varphi x$, za q dosazujeme výrok $\forall x \psi x$, za r dosazujeme výrok φy a za s dosazujeme výrok ψy , jako poslední premisy a (5) je zápis odloučeného zadního členu z poslední premisy podle výroku *9.12. V důkazu tedy děláme tyto kroky:

- a) zápis tvrzení, které už máme;
- b) zápis instance tvrzení, které už máme;
- c) zápis spojení dvou premis identifikující proměnnou podle výroku, který už máme;
- d) zápis odloučeného zadního členu premisy podle výroku, který už máme.

Pro jednoduchost považujeme první z těchto kroků za zvláštní případ druhého, tj. zápis tvrzení, které už máme, považujeme za zápis takové instance tvrzení, které už máme, v níž za nějakou proměnnou dosazujeme tuto proměnnou samotnou.

3. Pokus o formulaci pravidel

Zvyk z dnešní logiky nás vede k tomu, abychom všechny uvedené kroky v odvozování popsali nebo předešli ve formě podmíněných výroků o posloupnostech symbolicky zapsaných tvrzení zhruba tak, jak vypadá naše *10.13. Těmto výrokům bychom pak říkali „pravidla“ a vypadaly by například takto:

- b) (Pravidlo instanciace) Je-li výroková funkce ψx instancí výrokové funkce φx , a máme-li už „ $\vdash \varphi x$ “, budeme mít i „ $\vdash \psi x$ “.
- c) (Pravidlo identifikace proměnné) Jsou-li ve výrokových funkcích φx a ψx argumenty stejného typu a máme-li už „ $\vdash \varphi x$ “ a „ $\vdash \psi x$ “, budeme mít i „ $\vdash \varphi x \wedge \psi x$ “.
- d) (Pravidlo inference) Máme-li už „ $\vdash \varphi x$ “ a „ $\vdash \varphi x \rightarrow \psi x$ “, budeme mít i „ $\vdash \psi x$ “.

K tomu poznamenejme následující:

ad b) Měli bychom vyjasnit, kdy je něco instancí něčeho jiného; v tvrzení výroků, resp. výrokových funkcí, se vyskytují proměnné různých a různě na sobě závislých typů, a při současném dosazování za více z nich by se mohly pomíchat.³ Jde ale o to, že výroková funkce je instancí druhé výrokové funkce, když jakákoli hodnota té první (tj. jakýkoli výrok, který z ní vznikne po udělení hodnot jejím proměnným) je i hodnotou té druhé. V případě dnes obvyklé výrokové logiky nebo predikátové logiky prvního řádu bychom uvažovali o korektním dosazování libovolných výroků za výrokové proměnné a libovolných funkcí prvního řádu za predikátové proměnné.⁴

ad c) Smyslem tohoto výroku je, že při spojení dvou výrokových funkcí obsahujících stejnou proměnnou do jedné se tato proměnná v obou spojovaných částech za zmíněné podmínky identifikuje, nikoli to, že budeme mít i spojení dvou už tvrzených výroků – to odvodíme z

$$*3.2 \quad \vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$$

a dvou opakování *9.12. Kdybychom proto s identifikací proměnných zacházeli jinak, např. ji tiše předpokládali nebo ji vtělili do značení, tento výrok by byl nadbytečný.⁵

ad d) Jde o běžnou podobu „pravidla odloučení“ nebo „modu ponens“.

3 Pečlivě vypracovanou definici najdeme například v Kamareddine, F., Laan, T., Nederpelt, R.: „Types in Logic and Mathematics before 1940“. In: *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 8/2, 2002. s. 185–245. S využitím induktivní definice výrokových funkcí a jejich překladu do l-zápisu tu je výsledek současného dosazení definovaný jako inverzní překlad výsledku aplikace a b-redukce do b-normálního tvaru, pokud takový překlad a výsledek existuje.

4 Takové pravidlo najdeme jako „pravidlo substituce“ např. v Church, A.: *Introduction to Mathematical Logic*. Pincerton University Press, 1956. s. 72 pro výrokovou logiku a s. 218 pro predikátovou logiku prvního řádu. Podobné pravidlo je i v citovaném Gödelově článku, s. 350.

5 Viz Landini, G.: *Russell's Hidden Substitutional Theory*. Oxford University Press, 1998. s. 260 a dále.

4. Původní úvahy

Tím jsme se ale nechali odvést od úlohy, kterou jednotlivá tvrzení měla v uvedeném odvození. K tomu, abychom k ní svou pozornost vrátili, nám poslouží několik úvah a zmínek z původního textu.

Ad b), tj. „pravidlo instanciace“. Kapitola *2, tedy místo, kde se prvně setkáváme s odvozováním, začíná slovy:

„Důkazy prvních výroků z této kapitoly sestávají jednoduše z povšimnutí, že jsou instancemi obecných pravidel daných v kapitole *1. V takových případech nejsou tato pravidla premisami, protože tvrdí jakoukoli svou instanci a ne něco jiného než své instance [...] Rozpoznání, že určitý výrok je instancí nějakého obecného výroku dříve dokázaného nebo předpokládaného, je pro proces dedukce z obecných pravidel podstatné, ale samo nemůže být ustaveno jako obecné pravidlo, protože jeho požadované použití je vždy jednotlivé a žádné obecné pravidlo nemůže explicitně zahrnovat jednotlivé použití.“⁶

Nejprve si všimněme, že se tu o všech tvrzeních v rozvoji mluví jako o „pravidlech“, tedy nejenom o těch, o nichž ze zvyku jako o „pravidlech“ mluvíme. Nabízí se tedy otázka, zda se rozpoznávání (angl. recognition) instancí vztahuje i na ta tvrzení, která nejsou symbolicky zapsaná, a na „pravidla“ ve smyslu výroků o posloupnostech symbolicky zapsaných tvrzení, a tedy i na případné „pravidlo instanciace“.

Projděme náš příklad odvození, v němž žádné „pravidlo instanciace“ nemáme: V prvním kroku jsme jenom zapsali tvrzení, které už máme; pro jednoduchost to ale považujeme za zvláštní případ rozpoznání, že je to instance něčeho už dokázaného nebo předpokládaného. V druhém kroku jsme rozpoznali, že tvrzený výrok, resp. výroková funkce, je instancí toho předchozího. U třetího kroku se nabízejí dva výklady: Buď jsme rozpoznali, že jde o instanci *10.13, a tiše předpokládali, že přední člen této podmínky je pravdivý, a pak rozpoznali, že zadní člen této podmínky je instancí *9.12, tj. udělali tiše následující odvození:

6 PM, s. 98.

- *10.13 Jsou-li v $\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ a v $\forall x \psi x \rightarrow \psi y$ argumenty stejného typu a máme-li už „ $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ “ a „ $\vdash \forall x \psi x \rightarrow \psi y$ “, budeme mít i „ $\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)$ “. (1)
- Tichý předp. V $\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ a v $\forall x \psi x \rightarrow \psi y$ jsou argumenty stejného typu. (2)
- (1), (2), *9.12 $\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)$

V *10.13 jsme za φx dosadili $\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ a za ψx jsme dosadili $\forall x \psi x \rightarrow \psi y$, a v *9.12 jsme potom za „co je implikované pravdivou premisou“ dosadili „budeme mít i „ $\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)$ ““. Anebo, což je druhý výklad, vyjdeme-li z toho, že rozpoznávání instancí a dosazování se vztahuje jen na symbolicky zapsaná tvrzení a užívání těch ostatních, tj. v tomto případě *10.13 a *9.12, je něco jiného, v jiném smyslu jsme rozpoznali, že podle *10.13, zmíněného tichého předpokladu a předchozích dvou kroků budeme mít i „ $\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)$ ““. Ve čtvrtém kroku jsme rozpoznali, že jde o instanci *3.47, ovšem s tichými předpoklady o identifikaci proměnných. U závěrečného kroku se opět nabízejí dva výklady, analogické těm u třetího kroku: Buď že jsme rozpoznali, že tvrzený výrok, resp. výroková funkce, je instancí *9.12, anebo že jsme v jiném smyslu rozpoznali, že je podle *9.12 pravdivý.

Kdybychom k předchozímu rozvoji přidali „pravidlo inference“ chápané jako výrok o posloupnostech symbolicky zapsaných tvrzení, vypadlo by celé odvození takto (zkratkou INST budeme mínit toto pravidlo):

- *10.1, INST $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ (1)
- *10.1, INST $\vdash \forall x \psi x \rightarrow \psi y$ (2)
- (1), (2), *10.13 $\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)$ (3)
- *3.47, INST $\vdash ((\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)) \rightarrow ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y))$ (4)
- (3), (4), *9.12 $\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$

Teď máme na prvním, druhém a čtvrtém řádku napsané, podle jakého „pravidla“ a z jakého předchozího tvrzení je odvozený. V každém kroku tohoto odvození jsme ale v jiném smyslu také rozpoznali, že jde o zvláštní případ tvrzení, které není symbolicky zapsané, nebo jednoho z našich „pravidel“.

Kdybychom chtěli do rozvoje přidat „pravidlo“ o rozpoznávání zvláštních případů „pravidel“ (tj. „pravidel“ příslušných k *10.13, *9.12 a samotného „pravidla instanciace“), dostali bychom se do nekonečného cyklu. My

jsme ale nepochybně neudělali nekonečně mnoho rozpoznání a některé z nich bylo rovnou jednotlivé.

Ať už tedy odpovíme jakkoli na otázku, zda se rozpoznávání instancí vztahuje jen na symbolicky zapsaná tvrzení, nebo na všechna tvrzení v našem rozvoji, zůstane nám rozpoznávání zvláštních případů něčeho, co už máme, jako něco podstatně patřící k odvozování, ale nezapsané „pravidlem“. Přidání „pravidla inference“ k našemu rozvoji na tom nic nemění.

Ad c), tj. „pravidlo identifikace proměnné“. Protože *10.13 je až odvozené tvrzení, komentář k jeho smyslu najdeme u jeho předchůdce z *1, a to

*1.72 Jsou-li φ a ψ elementární výrokové funkce s elementárními výroky jako argumenty, je $\varphi \vee \psi$ elementární výroková funkce.

O tomto výroku se říká, že je spolu s pravidlem inference symbolicky podstatný pro provádění důkazů v souladu s teorií typů.⁷ V této souvislosti najdeme formulaci:

„Když máme oddělená tvrzení dvou různých funkcí proměnné x , v nichž je x neurčitá, je často důležité vědět, zda můžeme identifikovat x v jednom tvrzení s x v tom druhém. Tak to bude – což nám náš axiom umožní odvodit – když...“⁸

Kdy to tak bude, nám má umožnit odvodit náš předpoklad. V tvrzení *10.13 je pak konjunkce jenom zkratka za složení negace s disjunkcí a negace proměnné nepřidává, a jde v něm tedy vlastně o disjunkci; jeho odvození vychází z definice toho, kdy je něco stejného typu, ze dvou tvrzení teorie typů, z definice implikace a konjunkce, ze zákona vyloučeného třetího, z jednoho tvrzení symbolicky zapsané výrokové funkce o asociativitě disjunkce a z inference.⁹ Je to tedy tvrzení, které v sobě spojuje otázky smysluplnosti a inference jednoho symbolicky zapsaného tvrzení z jiného.

⁷ PM, s. 95.

⁸ PM, s. 13.

⁹ Viz PM, s. 141. a důkazy *9.61, *9.62 a *9.63 na s. 136 až 137, které vycházejí z *9.14 a *9.15, což jsou výchozí tvrzení teorie typů, a z primitivní ideje disjunkce. Odvození lze provést v obou přístupech *Principiů*, tj. i v přístupu z kap. *9, i v tom z kap. *10.

Pokud bychom brali *10.13 jako „pravidlo identifikace proměnné“, které by bylo výrokem o posloupnostech symbolicky zapsaných tvrzení, záleželo by na tom, zda bychom předpokládali, že všechny proměnné v nich obsažené mají ve všech svých výskytech tytéž předem dané typy a jen takovýchto posloupností by se naše „pravidla“ týkala. V tom případě by o tom, zda jsou v $\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ a v $\forall x \psi x \rightarrow \psi y$ argumenty stejného typu, vůbec nemělo smysl v odvození mluvit, a *10.13 by tedy bylo pouze „pravidlem přidání konjunkce“ (označíme jej zkratkou CON):

CON Máme-li už „ $\vdash \varphi x$ “ a „ $\vdash \psi x$ “, budeme mít i „ $\vdash \varphi x \wedge \psi x$ “,

což by bylo, jak jsme už viděli, nadbytečné. Naše odvození by pak vypadalo takto:

$$*10.1, \text{ INST} \quad \vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y \quad (1)$$

$$*10.1, \text{ INST} \quad \vdash \forall x \psi x \rightarrow \psi y \quad (2)$$

$$*3.2, \text{ INST} \quad \vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((\forall x \psi x \rightarrow \psi y) \rightarrow ((\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow (\forall x \psi x \rightarrow \psi y))) \quad (3)$$

$$(1), (3), *9.12 \quad \vdash (\forall x \psi x \rightarrow \psi y) \rightarrow ((\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)) \quad (4)$$

$$(2), (4), *9.12 \quad \vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y) \quad (5)$$

$$*3.47, \text{ INST} \quad \vdash ((\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)) \rightarrow ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)) \quad (6)$$

$$(5), (6), *9.12 \quad \vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$$

„Pravidlo identifikace proměnné“ by v odvození nebylo užité, ale proměnné by už byly identifikované předem. To ale není v souladu s citovanou formulací.

Pokud bychom nepředpokládali, že všechny proměnné v posloupnostech symbolicky zapsaných tvrzení mají ve všech svých výskytech tytéž předem dané typy, bylo by uvedení první podmínky v *10.13 nezbytné. V uvedeném odvození by totiž výroky, resp. výrokové funkce, od třetího řádku dál nebyly v některých případech smysluplné. „Pravidlo identifikace proměnné“ by tu nebylo pouze CON, a odvození by vypadalo takto (celé pravidlo budeme mluvit zkratkou IDF):

*10.1, INST	$\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$	(1)
*10.1, INST	$\vdash \forall x \psi x \rightarrow \psi y$	(2)
?, (1), (2), IDF	$\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)$	(3)
*3.47, INST	$\vdash ((\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)) \rightarrow ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y))$	(4)
(3), (4), *9.12	$\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$	

První podmínka IDF (že ve výrokových funkcích $\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ a v $\forall x \psi x \rightarrow \psi y$ jsou argumenty stejného typu) ale v této posloupnosti není, protože nejde o symbolicky zapsané tvrzení,¹⁰ a její splnění jsme ověřili v jiném smyslu než splnění druhé podmínky.

Ať už tedy identifikaci proměnných uděláme předem, nebo až při odvozování, zůstane nám jako něco, co patří k odvozování, ale není v něm symbolicky zapsané. Buď je nezapsaná „pravidlem“, nebo splnění jeho podmínky nezjistíme pouze ze symbolicky zapsaných tvrzení v posloupnosti.

ad d), tj. „pravidlo inference“. K tvrzení *9.12, resp. k jeho předchůdcům z *1, kterými jsou *1.1 a *1.11 najdeme v textu tento komentář:

„Není to stejné jako ‚je-li p pravdivý, pak je-li q implikovaný p, q je pravdivý‘. To je pravdivý výrok, ale platí právě tak, je-li p nepravdivý nebo není-li q implikovaný p. Neumožňuje, na rozdíl od našeho principu, tvrdit q prostě, bez jakékoli hypotézy. Nemůžeme tento princip vyjádřit symbolicky, zčásti protože jakýkoli symbolismus, v němž je p proměnná, poskytne jenom hypotézu, že p je pravdivý, ale ne fakt, že je pravdivý.“¹¹

Úvaha o tom, co znamená „nevyjádřitelnost symbolicky“ ale není tak jednoduchá, jak by se mohlo na první pohled zdát; jen o pár řádek dál najdeme formulaci:

¹⁰ Mohli bychom uvažovat o rozšíření symbolického jazyka i na výroky o typech, což se dělá v dnešní teorii typů. Protože ale v *Principiích* nejsou tyto výroky symbolicky zapsané, taková úvaha by překročila záměr této studie.

¹¹ PM, s. 94.

„umožňuje nám odvodit tvrzení výrokové funkce $\psi x'$ z tvrzení dvou výrokových funkcí $\varphi x'$ a $\varphi x \rightarrow \psi x'$.“¹²

A *1.11 (verze tohoto tvrzení pro elementární výrokové funkce) pak zní

*1.11 Když může být tvrzeno φx , kde x je skutečná proměnná, a může být tvrzeno $\varphi x \rightarrow \psi x$, kde x je skutečná proměnná, pak může být tvrzeno ψx , kde x je skutečná proměnná.¹³

A stejně tak komentář k samotnému tvrzení *9.12, které viditelně žádný symbolismus neobsahuje, říká:

„[...] smíme přejít od $\vdash \varphi x'$ a $\vdash \varphi x \wedge \psi x'$ k $\vdash \psi x'$, kde x je skutečná proměnná [...]“¹⁴

Všude tu jsou proměnné pro tvrzené výroky, resp. výrokové funkce. „Nevyjádřitelnost symbolicky“ tedy neznamena, že v tvrzeném výroku nemůžeme použít proměnné pro tvrzené výrokové funkce, nebo jinými slovy: Že bychom nemohli v „pravidle“ mluvit o tom, která tvrzení jsou nebo nejsou v našem rozvoji, což by rovnou vylučovalo přepis *9.12 jako výroku o posloupnostech symbolicky zapsaných tvrzení. „Nevyjádřitelnost symbolicky“ tu znamená, že *9.12 není podmíněné tvrzení, přestože nám tak různé způsoby jeho vyjádření připadají. Podobně jako u „pravidla instanciac“ se nám nabízejí dva výklady: Buď se „pravidla“ vztahují jen na symbolicky zapsaná tvrzení, nebo i na ostatní tvrzení v rozvoji. Pokud by se měla vztahovat na všechna tvrzení v rozvoji, tedy i na sebe sama, podmíněnost „pravidla inference“ by vedla k nekonečnému cyklu.¹⁵ My jsme ale nepochybně neudělali nekonečně mnoho inferencí a kdybychom chtěli všechny provedené zapsat, aspoň jedna by byla zapsaná nepodmíněným tvrzením. Je-li ale nepodmíněné, pak podle něj děláme inference i u ostatních pravidel a ta mohou zůstat podmíněná.

12 PM, s. 95.

13 PM, tamtéž. „Skutečná proměnná“ (angl. real variable) je to, co dnes nazýváme volnou proměnnou.

14 PM, s. 132.

15 Viz Russell, B.: *Principles of Mathematics*. Routledge, 2010 (původní vydání 1903). § 38, kde je diskuse Carrollova paradoxu.

Pokud bychom brali naše „pravidlo inference“ jako podmíněný výrok o posloupnostech symbolicky zapsaných tvrzení, který se na „pravidla“ nevztahuje (označíme jej zkratkou INF), odvození by vypadalo takto:

$$*10.1, \text{ INST} \quad \vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y \quad (1)$$

$$*10.1, \text{ INST} \quad \vdash \forall x \psi x \rightarrow \psi y \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{ CON} \quad \vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y) \quad (3)$$

$$*3.47, \text{ INST} \quad \vdash ((\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)) \rightarrow ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)) \quad (4)$$

$$(3), (4), \text{ INF} \quad \vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$$

Ted' máme na každém řádku napsané: Výrok o tom, za jakých podmínek „budeme mít“ příslušný řádek, a odkaz na řádky, jejichž přítomnost v rozvoji, tj. to, že je „už máme“, je splněním těchto podmínek. Nakolik jsme toto chtěli, natolik je to už dokonale zapsané. Inferenci zadního členu těchto „pravidel“, včetně „pravidla inference“, jsme ale v každém kroku tohoto odvození provedli v jiném smyslu.

K tomu ještě uvažme, že podobně jako u „pravidla identifikace proměnné“ má toto tvrzení zčásti úlohu týkající se otázky smysluplnosti. Uvedení *1.11 je provázáno komentářem:

„Bez nějakého axiomu bychom nevěděli, že ta x , pro která je „ $\varphi x \rightarrow \varphi y$ “ smysluplná, jsou ta samá jako ta, pro která je „ $\varphi x'$ “ smysluplná.“¹⁶

Z příslušného tvrzení tedy také poznáváme, které proměnné jsou stejného typu. Pokud bereme INF jen jako výrok o už typově identifikovaných výrazech, tuto jeho úlohu necháváme stranou.

Ať už tedy bereme „pravidlo inference“ tak či onak, zůstane nám v odvození něco, co podmíněný výrok o posloupnostech symbolických tvrzení nechává stranou jako prováděné v jiném smyslu. U všech tří druhů kroků v našem odvození tedy jejich odpovídající formulace jako podmíněných výroků o posloupnostech symbolických tvrzení dává smysl, ale ve všech případech nechá něco jako provedené jinak nebo v jiném smyslu:

b) u zápisu instance tvrzení nechává stranou rozpoznání, kdy je něco instancí;

16 PM, s. 95; a *1.11 pak dostává i druhé jméno: „axiom identifikace typu“.

- c) u zápisu spojení dvou premis identifikujícího proměnnou nechává stranou tuto identifikaci;
- d) u zápisu odloučeného zadního členu premisy nechává stranou odloučení.

5. Úloha pravidel

Úloha, kterou měla v odvození naše dvě tvrzení nezapsaná symbolicky (tj. *9.12 a *10.13), byla tedy jiná než popis nebo předpis kroku ve formě podmíněného výroku o posloupnostech tvrzení symbolicky zapsaných. Jejich úloha ale přesto souvisí s tím, jaké kroky v odvození děláme. Každý krok v odvození má, ať už výslovně, nebo díky zkratkovému zápisu tiše, svého předchůdce v rozvoji:

Ad b), tj. zápis instance tvrzení – předchůdcem je právě to tvrzení, jehož instanci tvrdíme. Každé tvrzení je totiž tvrzením všech svých instancí. Co je takovou instancí, rozpoznáváme s ohledem na tvrzení dostupnosti dosazovaných výroků, resp. výrokových funkcí, nejsou-li dostupné přímo z primitivních idejí.

Ad c), tj. zápis spojení dvou premis identifikující proměnnou – předchůdcem by bylo samotné tvrzení *10.13, kdybychom jej brali jako nepodmíněné; protože má ale viditelně formu podmínky, je předchůdcem spíše tvrzení *9.12. To potom slouží jako nepodmíněné tvrzení zadních členů všech tvrzených podmínek, symbolicky i nesymbolicky zapsaných, jejichž přední člen je také tvrzený. Co je takovým zadním členem, rozpoznáváme s ohledem na příslušná tvrzení podmínek a předních členů, což v tomto případě jsou tvrzení obou premis a stejnosti typů proměnných.

Ad d), tj. zápis odloučeného zadního členu premisy – předchůdcem je tvrzení *9.12, které je tvrzením všech takových zadních členů. Opět, co je takovým zadním členem, rozpoznáváme s ohledem na příslušná tvrzení podmínek a předních členů.

V tom, že jsou v odvození tímto předchůdcem dalších tvrzení, mají tedy naše dvě tvrzení nezapsaná symbolicky stejnou úlohu jako tvrzení symbolicky zapsaná. Všechno jsou to kroky v rozvoji, které předcházejí další

kroky tím, že už je provádějí; jsou to tvrzení, která předcházejí další tvrzení tím, že už tvrdí to, co ona. V tomto smyslu je také pochopitelné, proč jsou to všechno „pravidla“.

Naopak ale např. instanciace není v tomto smyslu „pravidlem“. Předchůdcem tvrzení instance je původní tvrzení a ne něco jiného. Nakolik nám jde o to, abychom v rozvoji měli předchůdce, natolik máme, co jsme chtěli. Proč to není stejné u inference, tj. proč potřebujeme v rozvoji tvrzení zadních členů? Protože bez něj bychom v rozvoji pro tyto zadní členy neměli předchůdce v tomto smyslu. V jiném smyslu bychom mohli mluvit o tom, že „závěr je obsažený v premisách“, ale ne v tom smyslu, že už jsme jej tvrdili.

Jde o to uvědomit si, že analyzujeme: Říkáme jinak to samé, co analyzujeme. Proto předvádíme v odvozování, co už jsme řekli.

6. Závěr

Viděli jsme, že brát tvrzení v *Principiích* připomínající to, čemu dnes říkáme „pravidla kalkulu“, jako popisy nebo předpisy kroků, je výkladovým posunem. Posloupnosti symbolicky zapsaných tvrzení v rozvoji lze matematicky popisovat a zkoumat stejně jako posloupnosti čísel nebo geometrických útvarů, ale je mylné domnívat se, že tím popisujeme a zkoumáme logickou analýzu. K ní totiž patří kromě symbolicky zapsaných tvrzení i tvrzení symbolicky nezapsaná. Vlastní principy rozvíjení analýzy, např. instanciace, přitom nejsou, jak jsme viděli, v podobě tvrzení vyjádřená vůbec.