

I. O povaze rovnic a pravidla inference

Tomáš Holeček

1. Úvod

V této studii se zamyslíme nad povahou postupů v matematice, a tím spíše i v matematické logice. Využijeme přitom poučení z raně novověké úvahy o metodě, kterou známe od René Descartesa.

2. Nároky na metodu

V druhé části *Rozpravy o metodě* (1637), která je předmluvou ke třem esejím, k *Dioptrice*, *Meteorům* a ke *Geometrii*, najdeme obecně známou formulaci metody. Samotnému předvedení jejích čtyř pravidel bezprostředně předchází autorovo zhodnocení tří věd, které považuje za „poněkud prospěšné“¹ svému cíli: logiky, geometrické analýzy a algebry. Podívejme se na to, co těmto vědám vytýká a co z nich potom do své metody nepřebírá:

„... v logice její sylogismy a většina jejích ostatních nauk spíše se hodí k tomu, vykládat druhému věci známé, anebo, jako nauka Lullova, mluvit bez soudnosti o věcech neznámých, než jim naučit. [...] Co se pak týče analýzy starých a algebry moderních, [...] první z nich je vždy tak odkázána na přihlížení k názorným tva-

1 René Descartes, *Rozprava o metodě*. Praha: Nakladatelství Svoboda 1992, s. 16.

rům, že může cvičit intelekt jen s velkou námahou obrazotvornosti; a při druhé z nich jsme do té míry podrobeni jistým pravidlům a jistým značením, že z ní učinili zmatené a temné umění, ducha zatěžující, místo vědy, ducha vzdělávající.“²

Jinými slovy:

- Logice vytýká vhodnost spíše k **výkladu známých věcí**, než k učení nových. Pro potřeby této studie tomu rozumějme tak, že logická symbolizace, ať už sylogistická nebo jiná, je podle něj v obvyklém pojetí vhodná spíše k tomu, abychom s její pomocí přehledně předvedli a uspořádali už známé výroky a jejich posloupnosti, než k tomu, abychom se s její pomocí něco nového naučili nebo to vymysleli.

- Alternativně logice vytýká vhodnost spíše k **nesoudnému mluvení o neznámých věcech**, než k jejich poznávání. Rozumějme tomu tak, že podle něj v obvyklém pojetí nabízí logika schémata přechodů, ať už v podobě algoritmů nebo jiné, která učení se novému nebo vymýšlení zdánlivě usnadňují, ale doopravdy jej jejich sledování spíše nahrazuje, a s jejichž pomocí jsou tedy přechody k něčemu novému prázdné a povrchní.³

- Analýze vytýká **odkázanost na přihlížení k názorným tvarům**, která zatěžuje cvičení ve vymýšlení námahou obrazotvornosti. Tomu rozumějme tak, že analytické postupy jsou podle něj v obvyklém pojetí pevně spojené s užívanými obrazy, kterých se pak držíme, i když je to zbytečně namáhavé a k vymýšlení něčeho nového je nepotřebujeme.⁴

- Algebře vytýká **podrobenost jistým pravidlům a značením**, jejímž důsledkem je zmatenost a temnota vymýšlení zatěžující, spíše než vzdělávající. Těto výtce rozumějme tak, že algebraické úmluvy o významech výrazů s proměnnými, ať už v podobě pravidel nebo jiné, podle něj v obvyklém

2 Descartes, Rozprava, s. 16–17, s úpravou, kde „*chiffres*“ беру jako „značení“. Do angličtiny to překládá Paul J. Olscamp jako „letters“, René Descartes, *Discourse on Method, Optics, Geometry and Meteorology*. Indianapolis/Cambridge: Hackett Publishing Company 2001, s. 16, Robert Stoothoff jako „symbols“, *The Philosophical Writings of Descartes*. Vol. I. Cambridge: Cambridge University Press 1985, s. 119.

3 Zmínku o Lullově nauce (Ars) chápu jako obecný odkaz na rozvoj schémat přechodů kombinováním omezeného počtu výchozích principů, více viz Anthony Bonner, *The Art and Logic of Ramon Llull. A users Guide*. Leiden/Boston: Brill 2007, s. 21 a dále.

4 O tom, že toto volné užívání obrazotvornosti rozhodně není jejím odmítnutím, viz Aleš Novák, *Žázračná věda. Filosofie René Descartesa 1618–1620*. Praha: Togga 2012.

pojetí narůstají do složitosti, která naši pozornost spíše upoutává na sebe samu, než aby nám pomáhala něco nového vymyslet.

Těmto výtkám tedy budeme rozumět tak, že autor na metodu klade čtyři negativní nároky: nemá být zaměřená na známé, prázdná ve svých přechodech, neoddělitelná od svých obrazů, ani spoutaná úmluvami. Při splnění těchto nároků má mít metoda přednosti tří zmíněných věd.⁵

Až s tímto se podívejme na pravidla:

„... První bylo, nepřijímat nikdy žádnou věc za pravdivou, již bych s evidencí jako pravdivou nebyl poznal: tj. vyhnout se pečlivě ukvapenosti a zaujatosti; a nezahrnovat nic víc do svých soudů než to, co by se objevilo tak jasně a zřetelně mému duchu, abych neměl žádnou možnost pochybovat o tom. Druhé, rozdělit každou z otázek, jež bych prozkoumával, na tolik částí, jak je jen možno a žádoucí, aby byly lépe rozřešeny. Třetí, vyvozovat v náležitém pořadí své myšlenky, počínaje předměty nejjednoduššími a nejsnáze poznatelnými, stoupaje povlovně jakoby se stupně na stupeň až k znalosti nejsložitějších, a předpokládaje dokonce řád i mezi těmi, jež přirozeně po sobě nenásledují. A poslední, činit všude tak úplné výčty a tak obecné přehledy, abych byl bezpečen, že jsem nic neopominul.“⁶

Těm budeme rozumět, pro naše potřeby, takto:

1. Vycházíme z toho, že pravidla metody jsou míněna tak, **aby** uvedené nároky splnila. V tomto smyslu berme jako ukvapené a zaujaté i řešení úloh v obvyklém pojetí zmíněných věd.⁷ I přehledné předvedení a uspořádání ze zadání úlohy známých výroků a jejich posloupností je ukvapené a zaujaté, nepatří-li už k vymyšlení nového řešení. Stejně tak se máme vyhnout sledování nějak se nabízejících schémat přechodů, držení se přebíraných a užívaných obrazů, nebo přijímání a rozvíjení úmluv, dokud je nepotřebujeme pro vymyšlení nového řešení. A nemá-li v našem vymyšlení

5 K těmto přednostem patří především zájem o věci „nejjednodušší a nejsnáze poznatelné“, který vede k důkazům, tj. pro Descartesa k „určitým jasným a evidentním důvodům“ (Descartes, *Rozprava*, s. 18).

6 Descartes, *Rozprava*, s. 17.

7 Samozřejmě: zajímá mne tu jen jeden ohled metody, a proto vůbec neuvažuji o ostatních vědách a na druhou stranu pomíjím otázku „dobré mysli“ jako toho, o co vlastně jde; důkladný výklad viz Richard Zika, *René Descartes. Metafyzika lidského dobra*. Praha: Filozofická fakulta UK 2010, s. 14 a dále.

být zahrnuto nic pochybného, rozumějme tomu nejen jako odmítnutí pochybných výroků, tj. toho, z čeho bychom vycházeli, přestože o tom pochybujeme, ale i pochybných postupů, tj. toho, jak bychom něco dělali, přestože o tom pochybujeme: např. jak se k sobě vztahují symboly, jak se sledují schémata přechodů... atd.

2. Při rozdělování úlohy na řešitelné části bychom potom v duchu metody neměli přihlížet k ničemu jinému než k řešitelnosti.

3. Ale jinak máme od nejsnadnějšího postupovat v řešení jakkoliv.

4. A přehledné předvádění má sloužit jen ke kontrole, nemá smysl samo v sobě.

3. Uplatnění metody v 1. knize Descartesovy *Geometrie*

V první knize *Geometrie* je nejprve předvedeno, jak vztáhnout aritmetické operace k délkám přímých čar,⁸ a jak potom řešit geometrické úlohy nacházením a úpravami rovnic obsahujících proměnné a konstantní délky a aritmetické operace s nimi, a následně jak tímto způsobem řešit geometrickou úlohu nalezení místa daného nějakým poměrem vzdáleností od daných přímých čar. Předvedení řešení geometrických úloh pomocí rovnic má dvě části: Jednak musíme rovnice nacházet a jednak musíme jejich kořeny sestrojít.

Aritmetické operace vztáhneme k délkám přímých čar takto:

- Sčítání a odčítání délek přímých čar bude jejich přidávání nebo odebírání.

- Násobení ale vyžaduje něco navíc, a to jakoukoliv volbu jednotky, tedy délky jedna. Až s její pomocí budeme mluvit o násobení. Součinem dvou délek pak je taková délka, která je k první z nich ve stejném poměru, jako druhá z nich k jednotce.

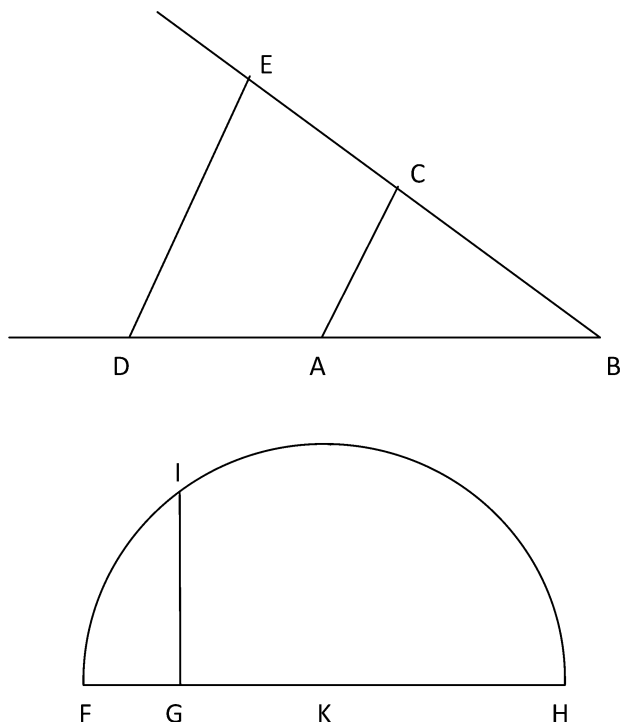
- Podobně jako násobení pak vztáhneme k délkám přímých čar dělení a odmocňování. Podílem dvou délek je taková délka, která je k první z nich ve stejném poměru, jako jednotka k druhé z nich, a druhou odmocninou⁹

8 V českém překladu „úseček“; volím ale raději „přímé čáry“ z překladu Eukleidových *Žákladů* podle Zbyněk Šír (ed.), *Řecké matematické texty*. Praha: OIKOYMENH 2011, s. 111 aj. Český a latinský překlad René Descartes, *Geometria/Geometrie*. Praha: OIKOYMENH 2010.

9 Vyšší odmocniny pro jednoduchost pomineme.

délky je taková délka, která je k jednotce ve stejném poměru, jako ta odmocňovaná k ní.

Autor nám navíc ukázal, jak hledané délky sestrojít:



První obrázek ukazuje, jak sestrojít součin délek přímých čar BC a BD: Svírají-li jakýkoli úhel, zvolíme jakoukoli délku BA na (případně protažené) přímé čáře BD jako jednotku a sestrojíme rovnoběžku s přímou čarou AC procházející bodem D; průsečík sestrojené přímé čáry s (případně protaženou) přímou čarou BC označíme E a délka BE je výsledný součin. Ten samý obrázek ukazuje, jak sestrojít podíl délek přímých čar BE a BD: K jakémukoli jejich úhlu a jakékoli zvolené jednotce BA sestrojíme rovnoběžku s přímou čarou DE procházející bodem A; průsečík sestrojené přímé čáry s (případně protaženou) přímou čarou BD označíme C a délka BC je výsledný podíl. Druhý obrázek ukazuje, jak sestrojít odmocninu délky GH: Přidáme k ní jakkoli zvolenou délku GF jako jednotku a z bodu K, který je středem vzniklé přímé čáry FH, sestrojíme nad přímou čarou FH kružnici; průsečík

této kružnice a kolmice k FH procházející bodem G označíme I a délka GI je výsledná odmocnina.

Snadno ověříme, že takto sestrojené délky mají požadované poměry k násobeným, děleným nebo odmocňovaným délkám: Na prvním obrázku je trojúhelník ABC podobný trojúhelníku DBE, a proto je poměr délky BC k délce BA stejný jako poměr délky BE k délce BD a poměr délky BC k délce BE stejný jako poměr délky BA k délce BD. Trojúhelníky jsou podobné, protože rovnoběžky svírají s poměřovanými přímými čarami stejné úhly. Na druhém obrázku je trojúhelník FGI podobný trojúhelníku HGI, a proto je poměr délky GI k délce GF stejný jako poměr délky GH k délce GI. Tady jsou trojúhelníky podobné, protože součet úhlů u přepony v pravoúhlém trojúhelníku je stejný jako úhel nad přeponou v trojúhelníku vepsaném do kružnice nad její průměr.

Při tomto ověření postupujeme jen pomocí jednoduchých a běžných geometrických idejí, což je přiměřené tomu, že nám jde o řešení geometrických úloh.

Snadno můžeme ověřit i to, že navržené vztažení aritmetických operací k délkám přímých čar bude splňovat i naše běžná očekávání z aritmetiky; např. že součet dvou stejných délek bude stejný jako dvojnásobek jedné z nich, že sčítání i násobení bude komutativní, nebo že součin jedné délky se součtem dalších dvou bude stejný jako součet jejích součinů s oběma.

Ale jaký to má smysl z pohledu metody a nároků, které na ni autor klade?¹⁰

- Pomocí zápisů aritmetických operací s proměnnými a konstantními délkami přímých čar teď umíme přehledně předvádět a uspořádávat to, co je o délkách známe ze zadání úlohy nebo z běžné geometrie. Jak jsme ale viděli v první výtce vůči logice a v jejím důsledku pro metodu, o to mám nejde. Nový způsob zápisů, tj. v našem případě aritmetická symbolizace, nás zajímá jenom tehdy, když nám pomáhá něco nového se naučit nebo vymyslet. Má tedy smysl jen v řešení nějaké úlohy, které zatím neznáme a chceme jej vymyslet.

- Postupy sestrojení součtu, rozdílu, součinu, podílu a druhé odmocniny délek teď umíme používat jako schémata přechodů od jedné délek

10 Smysl to nepochybně má, což je navenek vidět nejen z toho, že *Rozprava* byla předmluvou k *Esejím*, ale např. i z Descartesova dopisu Mersennovi (z prosince 1637): „...*Dioptrikou* a *Meteory* jsem se snažil přesvědčit, že má metoda je lepší než ta obvyklá, ale tvrdím, že *Geometrií* jsem ji dokázal.“ *Oeuvres de Descartes* / publiées par Charles Adam & Paul Tannery, *Correspondance I.*, Avril 1622 – Février 1638. Paris: Vrin 1996, s. 478.

k druhým. Tyto přechody se dají spojovat do algoritmů nebo do dál a dál se volně rozvíjejících postupů sestrojení. Jak jsme ale viděli v druhé výtce vůči logice a v jejím důsledku pro metodu, o to nám také nejde. Sledování těchto schémat by bylo prázdné a povrchní i ve vážnějším smyslu než jen v tom, že bychom si třeba ani nikdy neověřili, že takto sestrojené délky opravdu mají požadované poměry; bylo by prázdné a povrchní, pokud bychom jejich sledováním nevymýšleli něco nového.

- Aritmetické zápisy teď umíme v našich postupech využít tak, abychom se s jejich pomocí odpoutali od geometrických obrazů, protože je umíme upravovat samostatně. O toto odpoutání se od obrazů nám jde, jak jsme viděli ve výtce vůči geometrické analýze a v jejím důsledku pro metodu; v analytických postupech řešení úloh se totiž chceme držet obrazů z jejího zadání jen tehdy, když je potřebujeme. To si uvědomme proto, abychom vztažení aritmetických operací k délkám přímých čar nebrali jako přechod od odkázanosti na jedny obrazy k odkázanosti na druhé obrazy, ale jako odpoutání se od těch prvních.

- Musíme si ale položit i otázku, zda jsme se proto, abychom teď uměli brát¹¹ délky jako hodnoty proměnných i výsledků operací s nimi, podrobili nějakým úmluvám, které by nám mohly bránit ve vymýšlení něčeho nového. Jak jsme viděli ve výtce vůči algebře a v jejím důsledku pro metodu, o přijímání takovýchto úmluv nám nejde a spíše se jim máme vyhnout. Takovýmito úmluvami ovšem nejsou ani předvedená vztažení aritmetických operací k délkám přímých čar, ani předvedené postupy sestrojení jejich výsledků, přestože takový dojem snadno získáme. Říkáme-li totiž např. „Součinem dvou délek pak je taková délka, která...“, dělá to dojem, že zavádíme výchozí úmluvu, na níž je třeba přistoupit, aby se dalo pokračovat dál. Tak to ale není. Pokud vztahujeme aritmetické operace k délkám přímých čar tak, aby i jejich výsledky byly délky a aby přitom byla splněna všechna naše běžná očekávání z aritmetiky a geometrie, děláme to prostě tak, aby se nám to povedlo. Nenavrhujeme přitom žádné úmluvy, ani se jim nepodřizujeme.

Není na vztažení aritmetických operací k délkám přímých čar něco pochybného? Jak jsme viděli v prvním pravidle metody, všemu pochybnému se máme vyhýbat. O tom, že teď umíme aritmetické operace k délkám přímých čar vztáhnout, ale nemáme důvod pochybovat.

11 Tj. udělovat.

Není-li vztažení aritmetických operací k délkám přímých čar něčím, co spadlo z nebe, jak jsme na něj měli podle metody přijít? Nejde mi tu vůbec o historickou rekonstrukci autorova objevu,¹² ale o předvedení toho, o co se vztažení ve smyslu druhého pravidla opírá a co v něm je naopak podle třetího pravidla provedeno jakkoliv. Využiji tedy pravdivosti známého rčení, že po bitvě jsem i já generál, a z této pozice věc předvedu.

- Především si uvědomme, že jej použijeme k řešení geometrických úloh, které uvidíme dále. Jenom z toho, zda nám pomůže v jejich řešení, poznáme, zda je tím, co jsme hledali.

- Jak jsme měli přijít na to, že by nám něco takového pomohlo? Při obvyklém řešení jednoduchých geometrických úloh žádnou pomoc nepotřebujeme, ale dostáváme se do čím větších nesnází, čím je úloha složitější. Hledáme tedy něco, co je snadné používat i při velké složitosti a co nám pomůže s řešením geometrických úloh. Cokoli takového by bylo dobré, a kdyby takových pomůcek bylo více, vybereme si z nich podle třetího pravidla *libovolně*. Vidíme, že takto slouží v aritmetice zápisy s proměnnými a konstantami, které postupně upravujeme a nahrazujeme jedny druhými, a pokusíme se použít je.

- V geometrických úlohách je řeč o délkách přímých čar a o jejich poměrech. Tu se tedy pokusíme zapsat pomocí aritmetických operací s délkami tak, abychom potom jejich úpravami našli zápis, který nás zase dovede ke geometrickému řešení. Hledáme jednak zápisy zadání pomocí aritmetických operací a jednak postupy sestavení takto zapsaného řešení. Protože jako v běžné aritmetice použijeme pět operací, rozdělili jsme úlohu podle druhého pravidla na dvakrát pět částí.

12 Nemám ani žádný důvod tvrdit, že Descartes byl prvním, v jehož díle najdeme jednotlivé myšlenky a postupy, jimiž se tu zabýváme. Jak uvádí v komentářích k českému překladu Jiří Fiala, rozlišení analýzy a syntézy bylo běžné už u řeckých matematiků, viz Descartes, *Geometria/Geometrie*, s. xviii. Pokud jde o dobu raného novověku, Chikara Sasaki píše, že „Pappovu klasickou duální metodu analýzy a syntézy“ použil pro řešení geometrických úloh např. Willebrord Snel, Chikara Sasaki, *Descartes's Mathematical Thought*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers 2010, s. 238; algebraické postupy vztažené ke geometrii podle něj sice najdeme u Viety a u Descartesova mladšího současníka Fermata, ibid. s. 240 a dále, ale už v arabské matematice byla užívána algebraická analýza jako obecná metoda k řešení úloh aritmetických i geometrických a především poměry mezi délkami byly brány jako aritmetické dělení nebo zlomky např. Omarem Chajjámem už v jedenáctém století, ibid. s. 249 a dále. Z Descartesových předchůdců dále Sasaki v tomto smyslu zmiňuje Petera Ramuse a Van Roomena, ibid. s. 254 a dále, s. 262.

- Vztáhnout sčítání k délkám přímých čar jako jejich přidávání a odčítání jako jejich odebírání se nabízí samo, protože takové obrazy si se sčítáním a odčítáním běžně spojujeme.

- U násobení a dělení využijeme řeči o poměrech délek, které vezmeme jako poměry čísel. Protože z aritmetiky už umíme vztáhnout násobení a dělení k poměrům čísel, uděláme to stejně s poměry délek, jen k tomu ještě potřebujeme jednotku. Protože ale v původních geometrických úlohách není nijak dané, jaká jednotka je, zvolíme ji podle třetího pravidla jakkoli. Odmocňování pak vztáhneme k délkám podle jeho souvislosti s dělením.

- Abychom našli geometrické postupy sestrojení délek, které budou výsledky těchto operací, budeme už řešit jen běžné a jednoduché geometrické úlohy: u součinu sestrojíme takový trojúhelník, který bude mít jako jednu stranu první zadanou délku a bude podobný trojúhelníku, který bude mít jako odpovídající stranu jednotku a jako další stranu druhou zadanou délku; U podílu sestrojíme takový trojúhelník, který bude mít jako jednu stranu první zadanou délku a bude podobný trojúhelníku, který bude mít jako odpovídající stranu druhou zadanou délku a jako další stranu jednotku; u druhé odmocniny sestrojíme takové dva podobné trojúhelníky, které budou mít jednu stranu stejnou a v jednom bude odpovídat její pozici v druhém jednotka a v druhém bude odpovídat její pozici v prvním zadaná délka. Úhly v trojúhelnících přitom zvolíme jakkoli, aby se nám to povedlo, čehož využijeme u odmocniny.

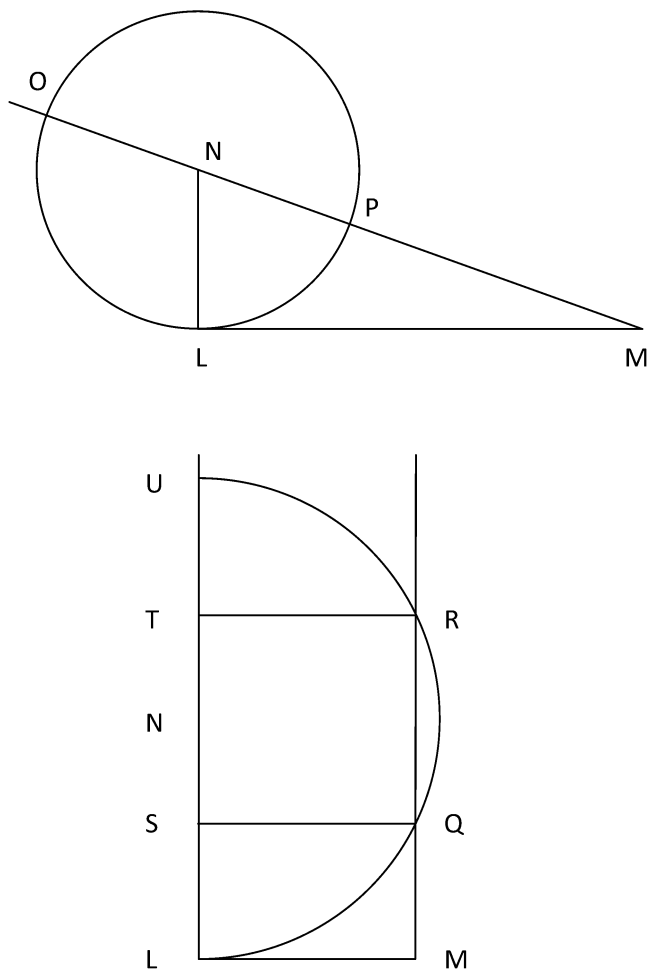
- Teď vidíme, že rozdělení úlohy na dostatečně snadné části a následné postupování od nejsnazšího jakýmkoli vhodným způsobem není vůbec automatické.

Vztažení aritmetických operací k délkám přímých čar má tedy sloužit k řešení geometrických úloh. Ty řešíme takto:

1. V úloze najdeme rovnice: vezmeme ji jako už vyřešenou a označíme všechny ze zadání známé délky konstantami a hledané neznámé délky proměnnými; jednoduchými a běžnými geometrickými úvahami, především pomocí podobnosti trojúhelníků a tedy stejnosti poměrů mezi délkami jejich stran, najdeme různé zápisy stejných délek pomocí aritmetických operací s konstantami a proměnnými a tyto zápisy složíme do rovnic. Podle třetího pravidla to uděláme jakkoli, třeba i s využitím dalších proměnných, a podle čtvrtého pravidla přitom sledujeme, zda jsme nic nevynechali. Tyto rovnice pak upravíme tak, aby jich bylo co nejméně a byly co nejjednodušší. Pokud v nich zůstane více proměnných, má úloha více řešení. Protože

v zadání úlohy byla řeč jen o polohách přímých čar, o jejich délkách a o jejich poměrech, nalezené rovnice jej přehledně předvádějí.

2. Autor nám navíc ukázal, jak sestrojít kořeny rovnic. Jsou-li lineární, stačí nám výše předvedené postupy sestrojení, jsou-li kvadratické, sestrojíme je takto:¹³



¹³ A jsou-li vyššího řádu, je to složitější, což pro jednoduchost výkladu pomineme.

První obrázek ukazuje, jak sestrojít kořen rovnice $z^2 = az + b^2$, kde délka LM je b a délka LN je polovina a : Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník MLN, kolem bodu N sestrojíme kružnici s poloměrem délky LN, od M vzdálenější průsečík protažené přímé čáry MN s touto kružnicí označíme O a délka MO je výsledný kořen. Obrázek současně ukazuje, jak sestrojít kořen rovnice $y^2 = -ay + b^2$: Průsečík přímé čáry MN s kružnicí označíme P a délka MP je výsledný kořen. Druhý obrázek¹⁴ ukazuje, jak sestrojít oba kořeny rovnice $x^2 = ax - b^2$, kde délka LM je opět b a délka LN polovina a : Kromě toho k minulému obrázku sestrojíme rovnoběžku s přímkou čarou LN procházející bodem M a označíme její průsečíky s kružnicí R a Q; výsledné kořeny jsou délky MQ a MR. Jiné podoby, k nimž by šlo sestrojít kořen, už kvadratická rovnice nemá.

Opět snadno ověříme, že takto sestrojené délky mají požadované vztahy k zadaným délkám: Na prvním obrázku je trojúhelník MLO podobný trojúhelníku MPL, a proto je poměr délky MO k délce ML stejný jako poměr délky ML k délce MP, což zapíšeme jako $\frac{z}{b} = \frac{b}{z-a}$ a to je jenom jiný zápis dané rovnice. Trojúhelníky jsou podobné, protože úhly OLP a MLN jsou stejné a úhly NLO a NOL také, a potom jsou stejné i úhly MOL a MLP. Také je proto na prvním obrázku poměr délky MP k délce ML stejný jako poměr délky ML k délce MO, což zapíšeme jako $\frac{y}{b} = -\frac{b}{y+a}$ a to je zase jenom jiný zápis dané rovnice. Na druhém obrázku je trojúhelník MLQ podobný trojúhelníku SQU, a proto je poměr délky MQ k délce ML stejný, jako poměr délky SQ k délce SU, což zapíšeme jako $\frac{x}{b} = \frac{b}{a-x}$ a to je zase jenom jiný zápis dané rovnice; pro druhý kořen je to analogické: Trojúhelník MLR podobný trojúhelníku TUR, a proto je poměr délky MR k délce ML stejný, jako poměr délky TR k délce TU. Trojúhelníky jsou podobné, protože úhly LQU a LRU jsou stejné jako úhly QML a RML, úhly QLM a QUL jsou stejné a úhly RLM a RUL také.

Při ověřování opět postupujeme jen pomocí jednoduchých a běžných geometrických idejí.

14 Do obrázku doplňuji k originálu body S, T a U, které jsou průsečíky (případně protažené) přímé čáry LN s rovnoběžkou k LM procházející bodem Q, rovnoběžkou k LM procházející bodem R a kružnicí.

Smysl takového řešení úloh z pohledu metody a nároků, které na ni autor klade, je teď patrný:

- Ze zadání úlohy přejdeme k rovnicím, které sestavujeme podle druhého pravidla proto, abychom z nich přešli k výslednému řešení. Jak samotná volba postupu pomocí rovnic, tak dílčí volby postupu jejich upravování nebo geometrického řešení jsou přitom podle třetího pravidla na nás.
- Nalezení postupů sestrojení kořenů rovnic už je opět jenom jednoduchou geometrickou úlohou a měli jsme na ně podle metody přijít sami.

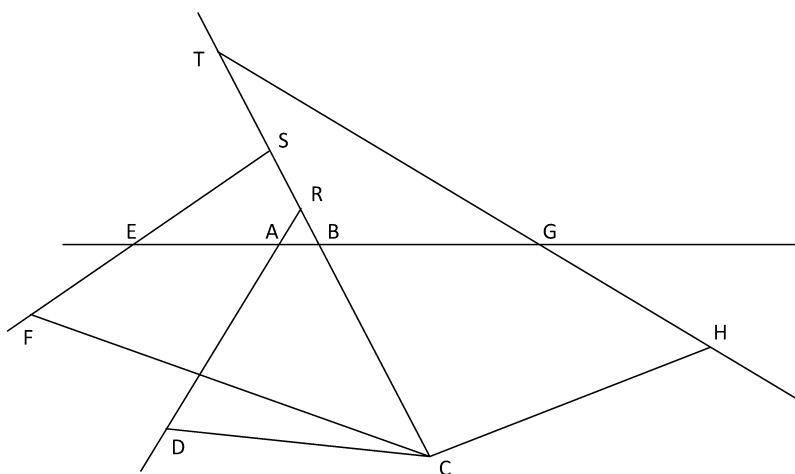
Jako příklad takového řešení geometrické úlohy nám autor předvedl nalezení místa daného nějakým poměrem vzdáleností od daných přímých čar. Přesněji řečeno: Máme určitý počet přímých čar daných polohou a ke každé z nich úhel, pod kterým nás bude zajímat vzdálenost hledaného místa od ní; k tomu máme dané, v jakém poměru mají být tyto vzdálenosti, resp. jejich součiny; máme najít, a tedy sestrojit, takové místo. V řešení postupujeme takto:

1. V úloze najdeme rovnici: Vezmeme úlohu jako už vyřešenou a najdeme zápisy všech vzdáleností hledaného místa od daných přímých čar pod danými úhly pomocí aritmetických operací s konstantními délkami určenými polohami daných přímých čar a poměry stran v trojúhelnících se všemi úhly danými a s nějakým množstvím proměnných. Tyto zápisy složíme do jedné rovnice, která bude zápisem zadání poměru mezi těmito vzdálenostmi, resp. mezi jejich součiny; rovnici pak upravíme, aby byla co nejjednodušší. Tato rovnice bude přehledným předvedením zadání úlohy.

2. Podle toho, jakého stupně rovnice bude, zvolíme postup sestrojení jejích kořenů. Stupeň rovnice bude záviset na tom, kolik vzdáleností na každé její straně násobíme a jaké proměnné jsme v zápisech těchto vzdáleností použili. Zatím jsme předvedli jen postupy sestrojení kořenů lineárních a kvadratických rovnic, proto o těch složitějších nebudeme uvažovat.

Autor nám ukázal postup sestavení rovnice pro čtyři přímé čáry:¹⁵

15 Pro jednoduchost projdeme sestavení rovnice jen pro tuto situaci, která je nakreslená na originálním obrázku. Kdyby byly přímé čáry vůči sobě v jiných polohách, tj. protínaly by se v jiném pořadí, nebo by byly některé z nich rovnoběžné, nebo by hledané místo leželo na jejich jiných stranách, dopadlo by to trochu jinak.



Podle obrázku sestavíme rovnici. C je hledané místo; na každé ze čtyř daných přímých čar označíme vrchol daného úhlu, pod kterým nás zajímá vzdálenost hledaného místa od ní: Budou to body B, D, F a H; průsečík první a druhé přímé čáry označíme A. Vzdálenost bodu C od první přímé čáry, tj. délku CB, zapíšeme proměnnou y a délku AB proměnnou x . Pro různé hodnoty x bude mít i y různé hodnoty, pokud se nám v závěrečné úpravě rovnice nepodaří x odstranit. Dále chceme zapsat vzdálenost bodu C od druhé přímé čáry, tj. délku CD. Zapíšeme ji pomocí už použitých proměnných x a y a konstant daných polohami přímých čar a úhly, proto budeme brát (případně protahované) přímé čáry AB a CB jako osy, k nimž budeme všechno ostatní v úloze vztahovat. Průsečík (případně protažené) přímé čáry CB a (případně protažené) přímé čáry AD označíme R. V trojúhelníku ARB jsou všechny úhly známy, protože úhel RAB je daný polohami přímých čar a úhel ABR je doplněk daného úhlu ABC do přímého úhlu, a proto je známý poměr stran v tomto trojúhelníku: zapíšeme poměr délky AB k délce BR jako $\frac{x}{b}$ (z je sice proměnná, ale tento poměr je konstantní; další proměnnou tu používáme proto, abychom vyjádřili všechny postupně uvažované poměry pomocí menšího počtu písmenek).¹⁶ Protože délka AB

16 Kdybychom zvolili nějak jednotku, mohli bychom tento poměr vyjádřit jednou konstantou, třeba b .

je x , je délka BR zapsatelná jako $\frac{xb}{z}$ a CR tedy jako $y + \frac{xb}{z}$. V trojúhelníku DRC jsou také všechny úhly známé, protože úhel DRC je stejný jako úhel ARC a úhel RDC je daný, a proto je známý i poměr stran v tomto trojúhelníku: Zapišeme poměr délky CR k délce CD jako $\frac{z}{c}$ a délku CD tedy jako $(y + \frac{xb}{z}) \cdot \frac{c}{z}$, což upravíme na $\frac{yc}{z} + \frac{xb c}{z^2}$. Dále chceme zapsat vzdálenost bodu C od třetí přímé čáry, tj. délku CF. Průsečík (případně protažené) třetí přímé čáry s (případně protaženou) přímkou čarou AB označíme E a její průsečík s (případně protaženou) přímkou čarou CB označíme S. Délka AE je daná polohami přímých čar a zapišeme ji konstantou k , délka BE je potom zapsatelná jako $x + k$. V trojúhelníku ESB jsou všechny úhly známé, protože úhel EBS je stejný jako úhel ABR a úhel SEB je daný polohami přímých čar, a proto je známý poměr stran v tomto trojúhelníku: Zapišeme poměr délky BE k délce BS jako $\frac{z}{d}$ a délku BS tedy jako $(x + k) \frac{d}{z}$, což upravíme na $\frac{xd}{z} + \frac{dk}{z}$. Délku CS potom zapišeme jako $y + \frac{xd}{z} + \frac{dk}{z}$. V trojúhelníku FSC jsou také všechny úhly známé, protože úhel FSC je stejný jako úhel ESB a úhel SFC je daný, a proto je známý i poměr stran v tomto trojúhelníku: zapišeme poměr délky CS k délce CF jako $\frac{z}{e}$ a délku CF tedy jako $(y + \frac{xd}{z} + \frac{dk}{z}) \frac{e}{z}$, což upravíme na $\frac{ye}{z} + \frac{xde}{z^2} + \frac{dek}{z^2}$. Nakonec chceme zapsat vzdálenost bodu C od čtvrté přímé čáry, tj. délku CH. Průsečík této (případně protažené) přímé čáry s (případně protaženou) přímkou čarou AB označíme G a její průsečík s (případně protaženou) přímkou čarou CB označíme T. Délka AG je daná polohami přímých čar a zapišeme ji konstantou l , délka BG je potom zapsatelná jako $l - x$. V trojúhelníku GTB jsou všechny úhly známé, protože úhel GBT je stejný jako úhel ABC a úhel BGT je daný polohami přímých čar, a proto je známý poměr stran v tomto trojúhelníku: zapišeme poměr délky BG k délce BT jako $\frac{z}{f}$ a délku BT jako $(l - x) \frac{f}{z}$, což upravíme na $\frac{lf}{z} - \frac{xf}{z}$. Délku CT potom zapišeme jako $y + \frac{lf}{z} - \frac{xf}{z}$. V trojúhelníku HTC jsou také všechny úhly známé, protože úhel HTC je stejný jako úhel GTB a úhel THC je daný, a proto je známý i poměr stran v tomto trojúhelníku: zapišeme poměr délky CT k délce CH jako $\frac{z}{g}$ a délku CH tedy jako $(y + \frac{lf}{z} - \frac{xf}{z}) \frac{g}{z}$, což upravíme na $\frac{yg}{z} + \frac{lf g}{z^2} - \frac{xf g}{z^2}$. Máme dané, v jakém poměru mají být tyto čtyři délky, tj. CB, CD, CF a CH; a tento poměr zapišeme rovnicí: Na jedné její straně bude součin dvou z nich, a na druhé součin zbývajících vynásobený případně nějakou konstantou: $y(\frac{yc}{z} + \frac{xb c}{z^2}) = h(\frac{ye}{z} + \frac{xde}{z^2} + \frac{dek}{z^2})(\frac{yg}{z} + \frac{lf g}{z^2} - \frac{xf g}{z^2})$, a tu upravíme na kvadratickou rovnici pro y .

Podle toho, jaké byly dané konstanty, vyjde ten nebo onen tvar kvadratické rovnice, jejíž kořen nebo kořeny pro libovolnou hodnotu x umíme sestrojit.

Kdyby bylo dáno více přímých čar, další vzdálenosti hledaného místa od nich bychom zapisovali analogickým postupem a výsledná rovnice by byla (pokud by se některé její části nevyrušily) vyššího stupně.

Na příkladu tedy vidíme:

- Vztažení aritmetických operací k délkám přímých čar sloužilo k přehlednému předvedení toho, co ze zadání úlohy známe, a toho, co hledáme. To jsme ale použili k vymyšlení něčeho nového.
- Žádná schémata přechodů jsem přitom nesledoval automaticky; co v kterém kroku dělat, to bylo vždy potřeba vymyslet.
- Vztažení aritmetických operací k délkám přímých čar nám pomohlo odpoutat se od geometrických obrazů, některé kroky vymyslet bez nich, a nakonec se k nim vrátit.
- Nepřístupovali jsme na žádné úmluvy, které by měly smysl samy v sobě.

4. Poučení z nároků na metodu

Vidíme, že takzvané „algebraizaci geometrie“¹⁷ můžeme rozumět jako splnění všech čtyř nároků na metodu při zachování dobrých vlastností logiky, analýzy a algebry, a tedy jako uplatnění metody. To se ale týká i moderní matematické logiky, přestože k jejím knihám už *Rozprava o metodě* předmluvou nebyla.

Domnívám se, že poučení z nároků na metodu nám pomůže i s rozuměním tomu, co děláme dnes.

17 Např. Paolo Mancosu píše o třech základních otázkách, které Descartesova algebraizace matematicky vyvolává: Otázku po povaze symbolického myšlení v protikladu ke geometrickému, otázku po přesunu pozornosti z předmětů na struktury, který maže rozdíly mezi poměry délek a zlomky, a otázku po statusu předmětů, které jsou uvažovány s ontologickým uvolněním od geometrie. Paolo Mancosu, *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. New York/Oxford: Oxford University Press 1996, s. 85.

5. Úvaha o úloze pravidla inference ve Whiteheadových *Principiích*

Vezměme jako příklad pravidlo inference a jeho užití. Podívejme se na jeho roli v důkazu tvrzení *2.08 z prvního dílu *Principia Mathematica* (1910):¹⁸

$$*2.08 \quad \vdash p \rightarrow p$$

Důkaz:

*2.05	$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	1
1 $\frac{p \vee p}{q} \frac{p}{r}$	$\vdash ((p \vee p) \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (p \vee p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$	2
*1.2	$\vdash (p \vee p) \rightarrow p$	3
2, 3, *1.11	$\vdash (p \rightarrow (p \vee p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$	4
*2.07	$\vdash p \rightarrow (p \vee p)$	5
4, 5, *1.11	$\vdash p \rightarrow p$	

Tento zápis, plný logických symbolů,¹⁹ znamená: Tvrdíme výrokovou funkci $p \rightarrow p$, jinými slovy: Tvrdíme jakýkoli výrok, který je hodnotou této funkce pro nějaké udělení hodnoty proměnné p ; tato funkce je taková instance implikace, která má na místě předního i zadního členu tutéž proměnnou p . Implikace je definovaná zkratka za výrokovou funkci $\sim p \vee q$, která je takovým složením výrokových funkcí negace a disjunkce, v němž je negace uvnitř disjunkce na místě jejího předního členu. Výrokové funkce negace a disjunkce jsou výchozími idejemi a fungují tak, jak je dnes běžné. Toto tvrzení dokazujeme v šesti krocích takto:

1. Tvrdíme *2.05.
2. Tvrzení výrokové funkce je i tvrzením všech jejích instancí, tj. takových výrokových funkcí, jejichž všechny hodnoty jsou i hodnotami původní výrokové funkce. Proto tvrdíme i takovou instanci výrokové funkce z *2.05, která vznikne současným dosazením $p \vee p$ za q a p za r .

¹⁸ Vycházím z textu prvního vydání Bertrand Russell, Alfred N. Whitehead, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 1910, s. 101. Stejně jako v případě *Geometrie* netvrdím, že se v *Principiích* objevují naše myšlenky poprvé; jistě bychom je v různých podobách našli už u Boolea, Fegea, Peana a dalších.

¹⁹ Pro větší srozumitelnost používám dnešní symboly spíše než původní z *Principií*.

3. Tvrdíme *1.2.

4. Tvrdíme zadní člen implikace tvrzené v druhém kroku. K tomuto tvrzení přecházíme inferencí z druhého a třetího kroku. Pravidlo inference *1.11, o jehož význam nám v této studii jde, je tvrzením takových výrokových funkcí, které jsou zadními členy tvrzených implikací, v nichž jsou předními členy tvrzené výrokové funkce; v našem případě: Tvrdíme výrokovou funkci $(p \rightarrow (p \vee p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$, která je zadním členem implikace $((p \vee p) \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (p \vee p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$ tvrzené v druhém kroku, v níž je přední člen $(p \vee p) \rightarrow p$ tvrzený ve třetím kroku.

5. Tvrdíme *2.07.

6. Tvrdíme zadní člen implikace tvrzené ve čtvrtém kroku, což je dokazované tvrzení. K tomuto tvrzení opět přecházíme inferencí, tentokrát z čtvrtého a pátého kroku.

Kde jsme vzali tvrzení *2.05, *1.2 a *2.07 a proč z nich důkaz vychází?

- Tvrzení *2.05 je tvrzením výrokové funkce $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$. Toto tvrzení je dokazované dříve²⁰ než *2.08 a to ve třech krocích:

*1.6	$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$	1
$1 \frac{\sim p}{p}$	$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\sim p \vee q) \rightarrow (\sim p \vee r))$	2
2, *1.01	$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	

To znamená, že nejprve tvrdíme *1.6, což je výchozí tvrzení, pak jeho instanci, která vznikne dosazením $\sim p$ na místo p , a potom tuto výrokovou funkci v třetím tvrzení přepíšeme pomocí definice implikace *1.01 tak, že složené funkce $\sim p \vee q$ a $\sim p \vee r$ přepíšeme jako implikace. Toto tvrzení jsme v důkazu *2.08 použili k tomu, abychom instanci zadního členu jeho zadního členu, tj. $p \rightarrow r$, vzali jako tvrzenou výrokovou funkci $p \rightarrow p$, kterou postupně odloučíme²¹ od obou předních členů.

- Tvrzení *1.02 je výchozí tvrzení, které jsme v důkazu *2.08 použili k tomu, abychom od něj odloučili zadní člen tvrzení z druhého řádku.

20 Jak ukazuje původní číslování.

21 Historicky: „pravidlo odloučení“ je jiný název pro pravidlo inference.

- Tvrzení *2.07 je tvrzením výrokové funkce $p \rightarrow (p \vee p)$ a je dokazované dříve jako instance výchozího tvrzení *1.3, což je tvrzení výrokové funkce $q \rightarrow (p \vee q)$, která z něj vznikne dosazením p na místo q . Toto tvrzení jsme použili k tomu, abychom od něj odloučili zadní člen tvrzení ze čtvrtého řádku.

Snadno ověříme, že předvedený důkaz sestává jenom z tvrzení, která dokazovanému tvrzení předcházejí, z jejich instancí a z tvrzení, k nimž přecházíme inferencí. Při tomto ověření postupujeme pomocí výchozích idejí výroku, výrokové funkce, jejich tvrzení, negace a disjunkce a k nim příslušných dovedností v jejich skládání, jako např. dovedností ve skládání a rozkládání výrokových funkcí a v jejich dosazování za proměnné v jiných výrokových funkcích.

Variováním toho, co v předvedeném důkazu vidíme, se případně naučíme vymýšlet jiné důkazy stejných tvrzení, důkazy jiných tvrzení nebo i měnit výchozí tvrzení a dokazovat z nich jiná, budeme-li postupovat pomocí těch samých výchozích idejí. I výchozí ideje ale podle potřeby variujeme nebo doplňujeme, čehož nejsnazším příkladem by byla záměna disjunkce a negace za inkompatibilitu²² nebo disjunkce za implikaci. Následně k tomu bychom pak upravili definice.

Jaký to má smysl z pohledu metody a nároků, které na ni výše citovaný autor klade?

- Pomocí zápisů tvrzení výrokových funkcí, jejich instancí, tvrzení výrokových funkcí odloučených od předních členů tvrzených implikací, které jsou samy tvrzené, tj. tvrzení podle pravidla inference, a případně tvrzení podle dalších pravidel, která bychom mohli přidat, teď umíme přehledně předvádět a uspořádat odvození jedněch tvrzení z jiných. Jak jsme ale viděli v první větce vůči logice a v jejím důsledku pro metodu, toto má mít jenom služebnou úlohu při vymýšlení něčeho nového.

- Jednotlivé kroky v důkazech nebo jejich větší a dále se rozvíjející sestavy teď umíme používat jako schémata přechodů od jedněch tvrzení k druhým. Přímou se tu nabízí cesta k jejich algoritmickému nebo automatickému sledování, ale jak jsme viděli ve druhé větce vůči logice a v jejím důsledku pro metodu, to by naše vymýšlení něčeho nového spíše nahrazo-

²² NAND.

valo, než usnadňovalo. Rozvíjení schémat přechodů nemá soužit k tomu, abychom je slepě sledovali, ale samo patří k vymýšlení něčeho nového.

- Obrazy spojené s jednotlivými výrokovými funkcemi a jejich skládáním nejsou ve smyslu výtky vůči analýze a jejího důsledku pro metodu tím, k čemu chceme dospět a čeho se potom už máme držet. Naopak, zápisy výrokových funkcí a důkazů nám mají pomoci k tomu, abychom se odpoutali od obrazů užívaných v zadání (a musíme si položit otázku: co je tu vlastně zadáním?), protože je umíme upravovat samostatně. Jejich postupné skládání, definiční zkracování a rozvíjení důkazových postupů nám dále pomáhá odpoutávat se i od těch obrazů, které si spojujeme s nimi, a vytvářet si z nich nové, které budou dále snadněji použitelné.

- Významy zápisů tvrzených výrokových funkcí i jednotlivých řádků důkazu s odkazy na jiné řádky vypadají jako úmluvy, kterým se podrobujeme, abychom teď uměli takto postupovat. Pokud bychom považovali způsob sestavování důkazů v tomto spisu za cíl sám o sobě, bylo by tomu tak. I s tím je to ale stejné jako s výše předvedeným sestavováním rovnic v geometrii: Snadno to naroste do složitosti, která bude naši pozornost spíše upoutávat, než aby nám pomáhala něco nového vymyslet, jak jsme ale viděli ve výtce vůči algebře a v jejím důsledku pro metodu, o přijímání takovýchto úmluv nám nejde a celý způsob zápisů vymýšlíme tak, aby se nám povedlo, o co usilujeme.

O jaké vymýšlení něčeho nového v tomto případě jde? Geometrickým úlohám, v nichž šlo o vymýšlení postupu sestrojení nějakých míst nebo útvarů pomocí přímých čar a jejich délek, tu odpovídají úlohy logiky: Vymyslet takové složení matematických idejí a postupů, které bude zapsané ve výrazech s pevnými významy a které bude z matematiky odstraňovat známé paradoxy.²³ Zadáním je tedy odstranění známého paradoxu. Jinými slovy:

- Tím, co máme vymyslet, tj. jakoby řešením úlohy, je takové složení nějaké matematické ideje nebo postupu z výchozích idejí, které bude zapsané ve výrazech, jejichž význam budeme kontrolovat, a které nepovede v jiném svém známém použití k něčemu nežádoucímu.

- Jednotlivá tvrzení, např. tedy *2.08, představují dílčí kroky tohoto složení.

- Jejich důkazy jsou přehledným výčtem toho, jak jsme je složili.

23 Russell, Whitehead, *Principia*, s. 1.

- Použité výchozí ideje, způsoby a postup jejich skládání vybíráme a vymýšlíme ve smyslu všech čtyř pravidel metody tak, aby se nám to povedlo.

Naším cílem ale je uvážít, jakou roli tu má pravidlo inference. K tomu dojde přesněji zaměřenou otázkou: Jaký má toto pravidlo a jeho užití v důkazech smysl z pohledu metody a nároků, které na ni výše citovaný autor klade?

- Jeho uvedení v důkazech a předtím ve výčtu výchozích výroků je přehledným předvedením inference, tj. přechodu odloučením. Byl nám tento přechod známý už předtím, než jsme jej zapsali? V tom smyslu, že bychom jej uměli dělat, i kdybychom jej neuměli přehledně předvést, ano; ostatně: Právě proto, že umíme a chceme takovéto přechody v postupném rozvíjení skládaných tvrzení používat, jsme definovali implikaci jako tu výkovou funkci, jejíž hodnoty jsou pravdivé, právě když zachovává pravdivost svého předního členu ve svém zadním členu, a k tomu jsme také zvolili pravidlo inference jako jeden z výchozích výroků. Zda a jak tyto přechody ale použijeme k samotnému složení matematických idejí a postupů, zbývá vymyslet, a jejich přehledné zápisy jsou tu jenom pomocné.

- Toto pravidlo teď umíme používat jako schéma přechodů, které se v jednotlivých krocích důkazů nabízí ke sledování v dalším kroku. Umíme jej také použít ke skládání složitějších schémat přechodů. Jak vidíme, tvrzení dokazujeme těmito přechody, přestože bychom si uměli jeho pravdivost (což je v případě tvrzení *2.08 velmi patrné) rozmyslet bez nich. To ale neznamená, že sledováním schématu nahrazujeme své rozmyšlení: Naopak, chceme si pravdivost dokazovaného tvrzení rozmyslet těmito přechody, protože tím toto tvrzení skládáme z výchozích idejí a pravidlo inference je jedním z výchozích výroků, tj. je součástí postupného rozvoje složení.

- Aby nám pravidlo inference pomáhalo v odpoutání našeho skládání od obrazů, které jsou spojené se skládanými idejemi a postupy, spojujeme si s ním nové obrazy: Rozdělení instancí výrokových funkcí na přední a zadní část implikace a oddělení její zadní části. Výrokové funkce a jejich instance totiž umíme snadněji rozdělovat samostatně, to znamená bez běžně užívaných matematických obrazů. Výměna jedněch obrazů za jiné ale neznamená, že tyto obrazy k sobě nejsou vztažené, a už vůbec neznamená, že by nás ty nové zajímaly více než ty původní nebo že bychom se k nim měli pevně připoutat.

- A konečně, pravidlo inference není úmluvou, na kterou bychom „museli“ přistoupit, abychom „mohli“ s jeho pomocí dokazovat z jedněch tvrzení další. Rozmyslet si pravdivost jednotlivých tvrzení si umíme i bez něj,

stejně jako i bez něj umíme přejít z jednoho tvrzení k druhému tam, kde tento přechod zachovává pravdivost. Toto pravidlo a jeho používání v důkaze bylo vymyšlené tak, aby se nám povedlo, co jsme chtěli: Složit něco z výchozích idejí a přitom se vyvarovat známých paradoxů. Jeho zápis je položkou ve výčtu, tj. v přehledném předvedení tohoto složení.

6. Závěr

Viděli jsme tedy, že přehledné zápisy analytických postupů a jejich ustavení do podoby vědního přístupu jsou sice vystavené uvedeným výtkám ohledně ukvapenosti a zaujatosti, ale jejich původní význam je jiný. Je to tak v případě rovnic i zápisů matematické logiky.