

Matematika ve snu

Tomáš Holeček

1. Asi před dvaceti lety se mi po dvou týdnech přípravy ke zkoušce z matematické analýzy zdál sen, který jsem si více-méně zapamatoval. Paměť mám ovšem mizernou, takže na ni není spolehnutí; a ze samotné matematické analýzy si už nepamatuji téměř nic. Přesto ten sen zopakuji:

Měl jsem za úkol sečíst nekonečnou řadu danou posloupností násobků tří,¹ tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3n = 3 + 6 + 9 + 12 + \dots$$

a ve snu si neuvědomil, že s tím bude potíže. Pustil jsem se do sčítání a sečetl prvních devět (deset, kdybych byl počítal do nuly) členů řady

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 = 135$$

a rozhodl se rychleji postupovat tím, že součet dalších deseti členů řady bude opět 135, ale k tomu ještě desetkrát 30. A podobně pro třetí desítku členů, atd. Původní řadu tedy mohu nahradit řadou

$$\sum_{n=0}^{\infty} (30 \cdot n \cdot 10 + 135) = 135 + 435 + 735 + 1035 + \dots$$

1 Viz Jarník, V.: *Diferenciální počet I*. Academia, Praha 1984, s. 119 a dále.

která má stejný součet.² Postup jsem potom ještě stihnul zrychlit přechodem na sčítání stovek členů v řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} (300 \cdot n \cdot 100 + 14850) = 14850 + 44850 + \dots$$

a zdálo se mi, že zápisy těchto řad vykazují pravidelnost, kterou by snad bylo možné využít k dalšímu zrychlování sčítání. Přesto mi docházel čas a probudil jsem se s hrůzou, že ačkoli postupuji po stále větších krocích, celkový součet nemám. S probuzením jsem si uvědomil, že řada diverguje.

2. Chci-li porozumět vzpomínanému snu, musím si všimnout, že byl současně zmatený i matematický. Co je ale matematika a co na něm vůbec bylo matematického? Nebudu teď hledat svou vlastní odpověď na tuto otázku, to by byla jiná práce a úvaha. Podívám se na odpověď Martina Heideggera z jeho mnohokrát citovaného textu *Novověká matematická přírodní věda*³ a najdu tam toto:

S odkazem na původní řecký význam výrazu *ta mathémata*, „to, čemu se lze naučit, a proto zároveň to, čemu lze vyučovat“,⁴ můžeme brát matematiku jako učení (něm. das Lernen) v širokém významu. Učení je jednak cvičení (něm. die Übung), jako osvojování si užívání (něm. der Gebrauch), jednak seznamování se (něm. das Kennenlernen), jako učení se znát.⁵ V matematice, v učení v širokém významu, se tedy v něčem cvičíme a s něčím se seznamujeme. To, s čím se v učení seznamujeme, je kromě různých jednotlivostí původně to, co „musí předem být vzato na vědomí“, co „musí být naučeno a naučitelné“. ⁶ Učení je tedy v tomto širokém a původním významu seznamováním se s tím, jako co už předem (něm. voraus) něco bereme

2 Podle věty 76, viz tamtéž, s. 121.

3 Heidegger, M.: „Novověká matematická přírodní věda“. In: *Scientia-Philosophia* (1994), č. 6, s. 76–112. Překlad J. Polívky části původního textu: M. Heidegger, *Die Frage nach dem Ding*. GA 41, Vittorio Klostermann, Frankfurt nad Mohanem, 1984. Parafrázuji především § 18b.

4 Tamtéž, s. 79.

5 Tamtéž, s. 81.

6 Tamtéž, s. 82.

(brání = něm. das Nehmen). Předem to ale bereme na vědomí neurčitě, právě učením se to přivádíme ke znalosti zvláštním a určitým způsobem.⁷

To, co je na něčem matematické, je tedy to, co si už sami přinášíme s sebou.⁸ Brát něco jako něco matematického znamená brát to na vědomí, jako co to už předem známe. A to znamená: jako co to je.⁹

Takto předvedená je tedy matematika kladením otázek po tom, čím něco už předem je, a to, co je na něčem matematické, je to, na co se těmito otázkami ptáme.

3. S pomocí zmíněného předvedení matematiky se pokusím odpovědět na otázku, co bylo na vzpomínaném snu matematického. Nepůjde mi ovšem o trosky nebo pozůstatky něčeho patřícího k minulému učení a učení se v širokém a původním významu, protože to by už samo učení nebylo. Není nijak těžké porozumět vzpomínanému snu jako zmatenému složení idejí a symbolů z předchozích dnů přípravy ke zkoušce, které by snad mělo nějaký význam více-méně bez ohledu na to, nebo dokonce navzdory tomu, z čeho je syntéza provedená. Pokud si ale všímám, že šlo o matematický sen, chci v něm najít to, co se tímto snem učím a co z něj lze vyučovat. O čem z toho, co jsem si do snu přinesl, si tu uvědomuji, co to je?

Nově se seznamuji s některými čísly, například s čísly 135 a 14850. Nikdy dříve jsem jim nejspíš nevěnoval samostatnou pozornost a neuvědomoval jsem si jejich významnou úlohu při sčítání desítek nebo stovek členů posloupnosti násobků tří, přestože jsem neurčitým způsobem věděl o tom, že taková čísla umím najít. Udržet je navíc v mysli aspoň chvíli bez toho, že bych si je někam zapsal, je už pro mě natolik náročné, přinejmenším dnes, po dvaceti letech od doby, kdy jsem se dokázal připravovat ke zkoušce, že se s nimi seznamuji i tak, jako se seznamujeme například s bolestí – i když bolest pomine, a dokonce si už na ni neumím dobře vzpomenout, nějak ji znám.

V úloze ale nešlo o jednotlivá čísla, ani o čísla jako taková, a nešlo ani o řady čísel a jejich přechody. Zadáním úlohy byl až součet nekonečné řady, a tedy limita posloupnosti částečných součtů. Vzpomínaným snem se s tímto součtem, který jsem nepochybně v jeho definici (tj. v oboru obvyklé odpovědi na otázku po tom, co to je) předem znal, seznamuji nově a zvlášť-

⁷ Tamtéž, s. 82.

⁸ Tamtéž, s. 83.

⁹ Tamtéž, s. 83 a 84.

ním způsobem. Učím se tak samostatně rozumět této definici, nebo aspoň jednomu jejímu aspektu, tj. seznamuji se s ideou dál a dál opakovaného sčítání bez vědomého uvažování o limitech, což bych nejspíš v bdělém stavu pod vlivem dnešních matematických zvyklostí sám neudělal. Vzpomínaným snem se tedy seznamuji s něčím, s čím jsem se neseznámil v bdělém učení.

I to je ale jenom jednotlivost ve srovnání s tím, s čím se ve vzpomínaném snu seznamuji. Původně si tu uvědomuji, co je úloha a co je řešení úlohy. A protože úlohu jsem ve snu včas nevyřešil, ačkoliv jsem v řešení stále úspěšně postupoval, uvědomuji si tu také, co je nevyřešení úlohy a v jakém smyslu je v tomto typu úloh i bezchybný postup nesprávný. S tím se také seznamuji nově, protože i když jsem to nepochybně věděl i při běžném řešení úloh, v bdělém stavu jsem to nikdy doopravdy neudělal, do takového postupu bych se ani nepustil, nebo bych jej sám rychle opustil z netrpělivosti, z neschopnosti pokračovat v něčem viditelně marném, nebo protože bych někde udělal chybu.

Přehlédl bych ale ještě něco dalšího, co se vzpomínaným snem učím v nejširším a původním smyslu, kdybych ho považoval za současně matematický a zmatený tak, jako by to byly dvě jeho charakteristiky, které má nezávisle na sobě. Zmatenost a matematicčnost jsou ve vzpomínaném snu v pozoruhodné jednotě. Právě díky této jednotě беру zvláštním a určitým způsobem na vědomí, že původní znalosti z řešení matematické úlohy snadno zmizí a se mnou to nijak nehne. V tomto případě mi zmizela ve snu jen znalost o divergenci dané řady spolu se zbytnělou ideou limity, ale může-li takto zmizet něco, mohlo by zmizet i něco jiného. To, co se tímto snem učím, je tedy matematický postup při zmatenosti.

Patří to ještě k tomu, co jsem si do snu přinesl, co jsem předem bral neurčitě na vědomí?

4. Myslím, že jsem ve vzpomínaném snovém postupu nejen zachoval apodiktičnost, ale snažil jsem se i o jeho pravdivost, a proto jeho promyšlení zohledňující zmatenost lze použít jako výkladové cvičení k tezi „*nam certe, quamvis sominarem, si quid intellectui meo sit evidens, illud omnino est verum*“¹⁰ a s jeho pomocí lze položit následující dvě otázky, které zaslouží další pozornost:

10 Descartes, R.: *Meditace o první filosofii*. OIKOYMENH, Praha 2001, český překlad P. Glombíček a T. Marvan: „je-li mé chápavosti něco zřejmé, je to jistě naprosto pravdivé, i kdybych snil“, s. 100 a 101, orig. s. 71.

a) Jak porozumět nároku apodiktičnosti a pravdivosti v matematice, a tedy i v matematické logice, když postupy mohou být předvedeným způsobem zmatené a ledasco si při počítání mohu neuvědomit?

b) Je parafrázovaná odpověď Martina Heideggera na otázku po matematickosti dostatečná pro toto porozumění, protože odlišuje pominutelné jednotlivosti od toho, co zvláštním a určitým způsobem přivádím ke znalosti, nebo vyžaduje revizi?